

INTRODUCCIÓN



Abogado de profesión, matemático aficionado, nació en la ciudad de Beaumont-de-Lomange el 17 de agosto del 1601.

Pierre Fermat hizo importantes aportes a la matemática, como por ejemplo en Geometría Analítica. El cálculo de probabilidades, el cálculo infinitesimal y la aritmética.

Sus investigaciones se conocen, fundamentalmente, debido al intercambio de notas que mantuvo con matemáticos de la época, tales como Blaise Pascal (1623-1662); René Descartes (1596-1650); M. Mersenne entre otros.

Cabe destacar una carta dirigida a Pierre de Carcavi (1600-1684) en la que expone sumariamente lo que el consideraba importante, como por ejemplo el método del "descenso infinito".

En 1679, su hijo mayor Clement-Samuel recopiló y publicó sus obras y cartas de su padre.

En la copia de Bachet del libro de Diofanto, en la parte del mismo donde se plantea el problema de hallar cuadrados que son sumas de dos cuadrados, Fermat escribió.

"Cubum autem in duos cubos, aut quadrato-quadratum in duos quadrato-quadratos, et generaliter nullam in infinitud ultra quadratum potestatem in duos ejusdem nominis fere est dividere: cuius rei demonstrationem mirabilem sane detexi. Hanc marginis non capere".

Que traducido señala:

"Por otra parte, es imposible para un cubo ser suma de dos cubos, para una cuarta potencia ser suma de dos cuartas potencias o en general para un número que es potencia mayor que dos, ser suma de dos números que son de esta misma potencia. He descubierto una demostración maravillosa de esta afirmación imposible de escribir en este estrecho margen".

Simbólicamente, esa proposición, hoy llamada EL ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT establece que si "n" es un número natural mayor que dos, no existen números naturales x, y, z que satisfacen la ecuación :

$$x^n + y^n = z^n$$

Pierre Fermat falleció en la ciudad de Castres el 12 de enero de 1665.

CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

Al considerar los enteros positivos, observamos que la unidad es el único número que tiene un solo divisor, los demás números tienen dos o más divisores; según esto daremos las siguientes definiciones:

- 1. **NÚMERO PRIMO:** Es aquel número entero positivo que posee sólo dos divisores: la unidad y el mismo número.

Ejemplo:

3 es un número primo debido a que tiene sólo dos divisores: 1 y 3.
Son números primos: 2; 3; 5; 7; 11; 13;

- 2. **NÚMERO COMPUESTO:** Es aquel número entero positivo que tiene más de dos divisores.

Ejemplo:

6 es un número compuesto debido a que tiene más de dos divisores : 1 , 2 , 3 y 6.

- 3. **NÚMERO SIMPLE:** Es aquel número entero positivo que no tiene más de dos divisores.

- 4. **NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ (PESI):** Son aquellos que tienen como único divisor común a la unidad. A dichos números, también se les llama primos relativos o coprimos.

- 5. **DIVISOR PROPIO:** Son todos los divisores de N, menores que N.

Ejemplo: Los divisores propios de 12 son: 1, 2, 3, 4 y 6.

PROPIEDADES

- * La sucesión de números primos es infinita.
- * El único número primo par es 2.
- * Si N es un número primo mayor que 3, entonces $N \equiv \pm 1 \pmod 6$
- * Varios números consecutivos son PESI.
- * Si un número primo absoluto no está contenido en un número compuesto, ambos son PESI.

Ejercicios:

1. Demuestre que la sucesión de números primos es infinita.
2. Demuestre que el único número primo par es dos.
3. Demuestre que si N es un número primo mayor que 3, entonces $N \equiv \pm 1 \pmod 6$
4. La suma de dos números primos es 199, calcule el mayor.
5. Averigüe qué es un número perfecto, un número abundante, número defectuoso y números amigos.

Teorema Fundamental de la Aritmética:

Todo número entero positivo se puede descomponer como el producto de potencias de sus factores primos, esta descomposición es única y se conoce como descomposición canónica.

Ejemplo :

Descomponer canónicamente el número: 360.

360		2	
180		2	
90		2	
45		3	
15		3	
5		5	
1			

$$\Rightarrow 360 = \underbrace{2 \times 2 \times 2}_2 \times \underbrace{3 \times 3}_3 \times 5$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5^1$$

Ejercicio:

Demuestre que la descomposición canónica de un número es única.

ESTUDIO DE LOS DIVISORES DE UN NÚMERO

a) Tabla de Divisores:

Ejemplo: Confecciona la tabla de divisores de 120.

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

	2^0	2^1	2^2	2^3	← Divisores de 2^3
1	1	2	4	8	
3	3	6	12	24	
5	5	10	20	40	
	15	30	60	120	

Los divisores de 120 son :
 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 15, 20, 24, 30, 40, 60, 120.
 \Rightarrow 120 tiene 16 divisores.

*** Cantidad de Divisores de un Número:**

Sea $N = a^m \cdot b^n \cdot c^p$ la descomposición canónica de N; podemos calcular la cantidad de divisores de N sin necesidad de hacer la tabla de divisores, utilizando la siguiente fórmula :

$$CD(N) = (m + 1) (n + 1) (p + 1)$$

Ejemplo:

Calcule la cantidad de divisores de 120.

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

$$\Rightarrow CD(120) = \underbrace{(3+1)}_4 \underbrace{(1+1)}_2 \underbrace{(1+1)}_2 = 16$$

Obs. También se cumple:

$$CD(N) = CD(\text{primos}) + CD(\text{compuestos}) + 1$$

*** Suma de los Divisores de un Número:**

$$SD(N) = \left(\frac{a^{m+1} - 1}{a - 1} \right) \left(\frac{b^{n+1} - 1}{b - 1} \right) \left(\frac{c^{p+1} - 1}{c - 1} \right)$$

Ejemplo:

Calcule la suma de los divisores de 120.

$$120 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1$$

$$SD(120) = \left(\frac{2^{3+1} - 1}{2 - 1} \right) \left(\frac{3^{1+1} - 1}{3 - 1} \right) \left(\frac{5^{1+1} - 1}{5 - 1} \right) = 360$$

*** Producto de los Divisores de un Número:**

$$PD(N) = \sqrt{N^{CD(N)}}$$

Ejemplo:

Calcule el producto de los divisores de 120 como $CD(120) = 16$.

$$\Rightarrow PD(120) = \sqrt{120^{16}} = 120^8$$

*** Suma de las inversas de los divisores de N:**

$$SID(N) = \frac{SD(N)}{N}$$

Ejemplo:

Calcule la suma de las inversas de los divisores de 120.

$$SID(120) = \frac{SD(120)}{120} = \frac{360}{120} = 3$$

INDICADOR DE UN NÚMERO O FUNCIÓN EULER

$$\phi(N)$$

La cantidad de números menores o iguales que N y PESI con N se puede calcular utilizando la expresión :

$$\phi(N) = a^{m-1}(a-1)b^{n-1}(b-1)c^{p-1}(c-1)$$

que también se puede escribir :

$$\phi(N) = a^m b^n c^p \left(1 - \frac{1}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{b}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right)$$

Ejemplo:

¿Cuántos números menores o iguales que 12 son primos relativos con 12?

$$\underbrace{1, 5, 7, 11}_{4 \text{ números}}$$

Esta cantidad se puede calcular usando la función de Euler.

Como: $12 = 2^2 \times 3^1$

$$\phi(12) = \frac{2^{2-1}}{2} \frac{(2-1)}{1} \frac{3^{1-1}}{1} \frac{(3-1)}{2} = 4$$

o también:

$$\phi(12) = \frac{2^2}{4} \left(1 - \frac{1}{2}\right) \frac{3^1}{3} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = 4$$

Ejercicios:

1. ¿Cuántas fracciones propias e irreducibles de denominador 120 existen?

Rpta: 32

2. Demuestre una fórmula para sumar todos los números menores o iguales que N que son primos relativos con N.

3. Hallar la suma de todas las fracciones propias e irreducibles cuyo denominador es 600.

Rpta: 80

TEOREMAS ADICIONALES

TEOREMA DE WILSON: Si p es un número primo.

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$$

Ejemplo:

$$(5-1)! \equiv -1 \pmod{5}$$

TEOREMA DE EULER: Si a y b son PESI:

$$a^{\phi(b)} \equiv 1 \pmod{b}$$

Ejemplo:

Sea a = 3 y b = 8

Se cumple:

$$\underbrace{3^{\phi(8)}}_{3^4} \equiv 1 \pmod{8}$$

TEOREMA DE FERMAT: Si a y p son PESI y p es un número primo.

$$a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$$

Ejemplo: Sea a = 4 y p = 3 se cumple:

$$\underbrace{4^{3-1}}_{4^2} \equiv 1 \pmod{3}$$

Ejercicios:

1. Demuestre el Teorema de Fermat.
2. Demuestre el Teorema de Wilson.
3. Demuestre que: si p es primo

$$(a + b + c + \dots)^p \equiv a^p + b^p + c^p + \dots \pmod{p}$$

Donde: a, b, c, son números enteros positivos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. ¿Cuántos divisores tiene 1260?
 a) 16 b) 32 c) 40
 d) 30 e) 36
02. La suma de los factores primos de 19635 es:
 a) 15 b) 29 c) 43
 d) 28 e) 31
03. ¿Cuántos divisores impares tiene 98000?
 a) 10 b) 12 c) 16
 d) 8 e) 15
04. ¿Cuántos divisores de 240 no son múltiplos de 6?
 a) 4 b) 8 c) 15
 d) 12 e) 16
05. ¿Cuántos divisores tiene el número de divisores del cuadrado de 1386000?
 a) 24 b) 20 c) 18
 d) 16 e) 14
06. ¿Cuántos divisores primos tiene el número \overline{ababab} , si \overline{ab} es un número primo mayor que 37?
 a) 3 b) 4 c) 5
 d) 6 e) 7
07. Si $6^a \times 18^b$ tiene 77 divisores, hallar el valor de "a.b".
 a) 8 b) 6 c) 10
 d) 12 e) 15
08. Encuentre un número sabiendo que es de la forma 16×24^k y además tiene 84 divisores más que el número 1440.
 Dar el valor de k.
 a) 6 b) 8 c) 10
 d) 9 e) 5
09. Diga Ud., ¿Cuántos de los siguientes números son primos absolutos en base 7?
 $13_{(7)}; 31_{(7)}; 61_{(7)}; 25_{(7)}$
 a) 0 b) 1 c) 2
 d) 3 e) 4
10. El número de divisores no primos que tiene 160083 es:
 a) 36 b) 33 c) 32
 d) 51 e) 47
11. Hallar la suma de los divisores de 4680 que sean primos con 351.
 a) 72 b) 2340 c) 89
 d) 90 e) 83
12. Hallar el valor de n para que el número de divisores de $N = 30^n$ sea el doble del número de divisores de $M = 15 \cdot 18^n$.
 a) 5 b) 6 c) 7
 d) 8 e) 9
13. Calcula "n" si: $K = 12^n \times 28$, tiene 152 divisores compuestos.
 a) 5 b) 4 c) 3
 d) 2 e) 1
14. Calcular la cantidad de divisores de 14!, que sean impares mayores que 10.
 a) 216 b) 215 c) 214
 d) 211 e) 212
15. Hallar el menor múltiplo de 6, sabiendo que tiene 15 divisores menos que 1800.
 Dar como respuesta la suma de sus cifras.
 a) 15 b) 18 c) 19
 d) 21 e) 20
16. Si N tiene 21 divisores y es de 3 cifras, entonces la suma de sus cifras es:
 a) 12 b) 14 c) 15
 d) 16 e) 18

17. ¿Cuál es el menor número por el que se debe multiplicar a 648 para obtener 40 divisores?
- a) 5 b) 7 c) 8
d) 16 e) 12
18. Cuántos divisores tendrá el número N, si: $N = A \times B$ donde:
- $$A = 12 \times 12^2 \times 12^3 \times \dots \times 12^n$$
- $$B = 18 \times 18^2 \times 18^3 \times \dots \times 18^n$$
- a) $3n^2 + 3n$ b) $(3n^2 + 3n)^2$
c) $\frac{8n^2 + 3n}{2}$ d) $\frac{(3n^2 + 3n)^2}{2}$
e) $\frac{(3n^2 + 3n + 2)^2}{4}$
19. Si: $A = 15(18)^n$; $B = 30(27)^{2n-1}$ y la suma de la cantidad de los divisores de A y B es 132.
Hallar: $(n + 2)^2$
- a) 49 b) 36 c) 16
d) 25 e) 64
20. Hallar la suma de las cifras de un número entero N, sabiendo que admite sólo 2 divisores primos, que el número de sus divisores simples y compuestos es 6 y la suma de ellos es 28.
- a) 9 b) 5 c) 7
d) 3 e) 6
21. Los divisores primos de un entero positivo A son 2 y 3, el número de divisores de su raíz cuadrada es 12 y el número de divisores de su cuadrado es 117. ¿Cuántos de tales A existen?
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 0
22. El número \overline{ababab} es múltiplo de 169 y el es mayor posible, ¿cuántos divisores tiene?
- a) 20 b) 24 c) 36
d) 40 e) 42
23. ¿Cuántos números enteros existen que sean primos relativos con 10^4 menores que 10^4 ?
- a) 3000 b) 4000 c) 6000
d) 2000 e) 7000
24. El número $N = 2^{11} \times 15^k \times 5^k$, tiene 476 divisores que no son divisibles entre 12, ¿Cuántos de sus divisores son cubos perfectos?
- a) 64 b) 72 c) 81
d) 142 e) 144
25. ¿Cuántos triángulos isósceles tienen por área 5096cm^2 , siendo los valores de la base y altura medidas en cm, respecto al lado desigual, números enteros?
- a) 12 b) 30 c) 18
d) 16 e) 20
26. Si: $4 \times 3^x \times 5^{x+1}$, tiene 12 divisores múltiplos de 25, pero no múltiplos de 2. Determine la suma de los divisores pares de dicho número.
- a) 67320 b) 93720
c) 218680 d) 109340
e) 187440
27. Si A y B son números que admiten los mismos divisores primos, sabiendo que A tiene 35 divisores y B tiene 39 divisores.
¿Cuántos divisores tendrá el MCD de A^5 y B^5 ?
- a) 330 b) 310 c) 300
d) 341 e) 319
28. Lucía se da cuenta que las edades de sus 2 primos hermanos son números coprimos que se diferencian en 2 años. Además, si al producto de dichas edades le agrega la unidad, obtiene un número que tiene 8 divisores propios y 3 divisores simples.
Calcular la suma de todos los valores que toman dichas edades.
Se sabe que los primos hermanos de Lucía tienen menos de 21 años.
- a) 378 b) 92 c) 132
d) 76 e) 60
29. Calcular la suma de los cuadrados de los divisores de 144.
- a) 31031 b) 28028 c) 29029
d) 30030 e) 32032
30. Si el número de divisores de $\overline{ab0ab}$ es 40, hallar el máximo valor de "a + b".
- a) 8 b) 9 c) 12
d) 17 e) 13

31. Dadas las proposiciones:
- Si en un conjunto de números hay por lo menos dos números primos, entonces es un conjunto de primos relativos.
 - Forman un conjunto de primos relativos los números: a ; b ; c ; d y $(c + 1)$
 - El número $N : (a \times b \times c \times d \times \dots) + 1$ es primo si a ; b ; c ; \dots son números primos.
Los respectivos valores de verdad son:
- a) VVV b) VFV c) VVF
d) VFF e) FFF
32. Si el número: $N = a^m \times b^n$ está descom-puesto canónicamente y tiene 144 divisores, calcular cuántos valores puede adoptar m .
- a) 14 b) 12 c) 13
d) 15 e) 16
33. El número $N = 3^b \times 5^a$, tiene 3 divisores más que el número $M = 2^a \times 5^3$.
Hallar la diferencia de los números, e indicar la suma de cifras del resultado.
- a) 5 b) 9 c) 11
d) 13 e) 7
34. Indicar "V" o "F".
- $2^{2^n} + 1$ es primo, $\forall n \in \mathbb{Z}, n \geq 1$.
 - El divisor menor, distinto de la unidad, de un entero mayor que la unidad, es un número primo.
 - Sea "d" el menor divisor de un número compuesto N , entonces $d \geq \sqrt{N}$.
- a) FFF b) FVV c) FVF
d) FFV e) VVV
35. Laura desea saber cuántos números que tengan a lo más cinco cifras existen, tal que cumplan que la suma de sus cifras es 18 y tengan 21 divisores.
- a) 13 b) 9 c) 7
d) 4 e) 1
36. ¿Cuántos de los divisores del número $14^4 \times 625 \times 11^3$ son cuadrados perfectos?
- a) 27 b) 36 c) 54
e) 18 e) 81
37. ¿Cuántos números de 3 cifras son primos relativos con 6?
- a) 200 b) 150 c) 300
d) 600 e) 450
38. Determinar el valor de "n" si: 175×245^n tiene 28 divisores que no son $\frac{o}{35}$.
- a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 9
39. Al expresar 28884 en base "n" su última cifra fue 9, ¿Cuántos valores toma "n"?
- a) 16 b) 18 c) 21
d) 28 e) 32
40. Un número contiene 2 divisores primos y 12 divisores compuestos. Si la suma de todos sus divisores es 403, determinar la media armónica de todos sus divisores.
- a) 5,31 b) 5,36 c) 5,32
d) 5,38 e) 5,40
41. Sean p , q y r enteros de 1, 2 y 3 cifras respectivamente, que son primos absolutos y están en progresión aritmética de razón t , siendo r el menor primo absoluto de 3 cifras.
¿Cuántos divisores tiene t ?
- a) 8 b) 10 c) 12
d) 14 e) 16
42. En el año 1556, el célebre matemático Tartaglia afirmaba que las sumas: $1+2+4$; $1+2+4+8$; $1+2+4+8+16$; son alternadamente números primos y compuestos. ¿Cuál es el primer número de esta serie que no concuerda con ser prima?
Indique la suma de las cifras.
- a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8
43. Las edades de los profesores Carranza, Lau y Pizarro son \overline{ab} , \overline{co} y \overline{de} años, respectivamente. Dichas edades tienen 3, 8 y 6 divisores; donde \overline{ab} y \overline{co} son coprimos; además \overline{de} tiene tantos divisores comunes con \overline{ab} y \overline{co} .
Indique, ¿cuántos años le lleva el profesor Carranza al profesor Pizarro?
- a) 11 b) 18 c) 32
d) 16 e) 21

44. Si A y B son números que admiten los mismos divisores primos, sabiendo que A tiene 35 divisores y B tienen 39 divisores.
Calcular cuántos divisores compuestos tendrá $A \times B$.
(Considerar que A y B son mínimos)
- a) 112 b) 115 c) 119
d) 123 e) 130
45. Sabiendo que \overline{abcba} es $\overline{385}$ y además que $A = \overline{ab^k} \times \overline{bc}$ posee 42 divisores que terminan en un cero.
Hallar el valor de "k"
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
46. Indicar: (a + b) sabiendo que el número $N = 5000 \times 3^a \times 7^b$ tiene 240 divisores, donde a y b son cifras significativas no consecutivas.
- a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 3
47. Hallar las 3 últimas cifras al expresar 1087^{723} en el sistema senario.
- a) 133_6 b) 331_6 c) 431_6
d) 231_6 e) 333_6
48. Sea: $A = 2^2 \times 3^x \times 5^y$.
Si A posee 18 divisores múltiplos de 3 y 9 divisores múltiplos de 25.
Calcule: $\phi(\overline{xy} + \overline{yx})$
- a) 42 b) 36 c) 20
d) 14 e) 40
49. Si el número entero: $N = 5^{\overline{abc}} + \frac{7 \overline{abc}}{2}$
Al ser dividido entre 36 deja como residuo 11.
Determinar el menor valor que toma \overline{abc} ; indicar su cantidad de divisores propios.
- a) 11 b) 14 c) 17
d) 20 e) 24
50. Hallar en cuántos ceros termina $(55555!)^3$ escrito en el sistema de numeración de base 6.
- a) $125523_{(6)}$ b) $125253_{(6)}$
c) $125522_{(6)}$ d) $125252_{(6)}$
e) $152256_{(6)}$
51. Si el número $2^7 \times 3^{a+2} \times 7^a \times 11$ tiene 24 divisores primos con 440, hallar el valor de "a"
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
52. Averiguar en cuántos ceros termina $(25^{100})!$
- a) $\frac{5^{100}-1}{2}$ b) $\frac{5^{200}-1}{2}$
c) $\frac{5^{200}-1}{4}$ d) $\frac{5^{200}-1}{3}$
e) 5^{100}
53. Determinar el numeral de la forma: $N - A^a \times B \times C$ (Donde A, B y C son factores primos).
Sabido que la suma de divisores es 14 veces su cantidad de divisores. Además al dividir \overline{AB} entre 4 se obtiene C de cociente y resto máximo, en cambio al dividir \overline{AC} entre 8 se obtuvo B de cociente y resto mínimo.
Dar como respuesta la suma de cifras del numeral pedido.
- a) 2 b) 3 c) 4
d) 6 e) 9
54. Si $\overline{mn0} = a! + b! + c!$, ¿en cuántos ceros termina el mayor $\overline{ac}!$ cuando se expresa en base 6?
- a) 22 b) 30 c) 35
d) 25 e) 31
55. Dados los números naturales "m" y "n", se cumple que "m" y "n" son primos relativos, entonces $m^{\phi(n)} = n + 1$.
Siendo $\phi(n)$ la función de Euler o el indicador del número "n".
Aplicando la relación anterior, hallar 3 últimas cifras del desarrollo de 13^{296} expresando en base 7.
- a) 334 b) 239 c) 331
d) 332 e) 212

56. El máximo número de términos de una progresión aritmética de razón 210 cuyos términos son todos números primos es :

- a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

57. Si: $\overline{mmmm}_{(n)} = n^5 - 1$

Además : $N = \underbrace{m^a \times n^n \times p^b}_{\text{(Descomposición canónica)}}$

Donde: N posee 60 divisores cuya suma de cifras es divisible por 9 y 80 divisores cuya última cifra es cero. Calcular "a + b"

- a) 9 b) 10 c) 12
d) 13 e) 15

58. Si el numeral $(999!)^5$ se escribe en base 14, ¿en cuántos ceros termina?.

- a) 386 b) 802 c) 8020
d) 820 e) 186

59. Colocar "V" si es verdadero o "F" si es falso según corresponda en:

I. Si \overline{mnp} es número primo, entonces $\frac{\overline{ab}^{\overline{mnp}}}{\overline{ab}} = \frac{o}{\overline{mnp} + \overline{ab}}$.

II. Si $N = a^2 - b^2$ además N es el menor número primo de 5 cifras, entonces $CD_{(a+b)} = 2$.

III. Entre 216 y 7560 existen 15120 números PESI con 72.

- a) VFV b) FVF c) VVV
d) FFV e) VVF

60. Sabemos que el número, cuya descomposición canónica es $a^3 \times b^5$ ($a < b$) y \overline{aabb} sólo tienen 2 divisores comunes.

Determinar el número de valores de "a".

- a) 3 b) 2 c) 5
d) 1 e) 4

Claves

01.	e
02.	c
03.	b
04.	d
05.	b
06.	c
07.	a
08.	e
09.	c
10.	b
11.	d
12.	c
13.	a
14.	d
15.	b
16.	e
17.	a
18.	e
19.	d
20.	d
21.	b
22.	c
23.	b
24.	b
25.	b
26.	e
27.	d
28.	e
29.	a
30.	b

31.	c
32.	c
33.	d
34.	d
35.	d
36.	c
37.	c
38.	d
39.	d
40.	b
41.	b
42.	d
43.	e
44.	e
45.	e
46.	c
47.	b
48.	c
49.	a
50.	a
51.	d
52.	c
53.	d
54.	b
55.	c
56.	b
57.	a
58.	d
59.	e
60.	b