

RELACIONES

1. Definiciones Previas

1.1. Par ordenado :

Es un conjunto de dos elementos considerados en un determinado orden. Si los elementos del par ordenado son "a" y "b", al conjunto se le denota por (a; b) y se define de la manera siguiente :

$$(a; b) = \{\{a\}; \{a; b\}\}$$

Donde :

a = primera componente del par
b = segunda componente del par

Propiedades :

- I. $(a; b) \neq (b; a); \forall a \neq b$
- II. $(a; b) = (c; d) \rightarrow a = c \wedge b = d$

1.2. Producto Cartesiano :

Dados los conjuntos no vacíos A y B, el producto cartesiano de A por B (en ese orden), se denota así $A \times B$ y se define de la siguiente manera :

$$A \times B = \{(a; b) / a \in A \wedge b \in B\}$$

Donde :

A = conjunto de partida
B = conjunto de llegada

Ejemplo : Dados los conjuntos :

$$A = \{1; 2; 3\} \wedge B = \{-1; 2\}$$

Determinar : $A \times B \wedge B \times A$

Resolución :

Para $A \times B$, tenemos :

$$A \times B = \{1; 2; 3\} \wedge \{-1; 2\}$$

$$A \times B = \{(1; -1), (1; 2), (2; -1), (2; 2), (3; -1), (3; 2)\}$$

Para $B \times A$, tenemos :

$$B \times A = \{-1; 2\} \wedge \{1; 2; 3\}$$

$$B \times A = \{(-1; 1), (-1; 2), (-1; 3), (2; 1), (2; 2), (2; 3)\}$$

Propiedades :

- I. El producto cartesiano no es conmutativo :

$$A \times B \neq B \times A$$

- II. El número de elementos $A \times B$ es igual al número de elementos de $B \times A$ y se obtiene según la fórmula :

$$n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \cdot n(B)$$

2. Relación Binaria

2.1. Definición :

Dados dos conjuntos no vacíos A y B, se dice que R es una relación de A en B (en ese orden), si y sólo si, R es un subconjunto de $A \times B$, es decir :

$$R \subset A \times B$$

$$R = \{(a; b) / a \in B \wedge b \in B \wedge a R b\}$$

Donde :

$a R b$, indica la relación que existe entre los componentes "a" y "b".

Ejemplo : Dados los conjuntos :

$$A = \{1; 2; 4\} \wedge B = \{2; 3\}$$

Determinar la relación de R de A en B definida de la manera siguiente :

$$R = \{(a; b) / a \in A \wedge b \in B \wedge a < b\}$$

Resolución :

Hallar el producto cartesiano de A por B.

$$A \times B = \{1; 2; 4\} \{2; 3\}$$

$$A \times B = \{(1; 2), (1; 3), (2; 2), (2; 3), (4; 2), (4; 3)\}$$

observar que los elementos de R son todos los pares (a; b) $\in A \times B / a < b$. Luego, tenemos :

$$R = \{(1; 2), (1; 3), (2; 3)\}$$

2.2. Relación en A :

Dado el conjunto no vacío A, se dice que R es una relación en A, si y solamente si, $R \subset A \times A$.

2.3. Clases de Relación :

Sea R una relación en A ($R \subset A \times B$), luego R podrá ser :

I. Reflexiva

$$\forall a \in A \rightarrow (a;a) \in R$$

II. Simétrica

$$(a;b) \in R \rightarrow (b;a) \in R$$

III. Transitiva

$$(a;b) \in R \wedge (b;c) \in R \rightarrow (a;c) \in R$$

IV. De equivalencia

Siempre y cuando sea a la vez reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejemplo : Dado el conjunto
 $A = \{1; 2; 3\}$

Se define una relación en A de la manera siguiente :

$$R = \{(1; 1), (1; 2), (2; 2), (3; 3), (2; 1)\}$$

¿R es una relación de equivalencia?

Resolución :

Si R es una relación de equivalencia, deberá ser reflexiva, simétrica y transitiva a la vez.

Reflexiva $\forall a \in R \rightarrow (a;a) \in R$

$$1 \in A \rightarrow (1; 1) \in R \quad \text{¡Correcto!}$$

$$2 \in A \rightarrow (2; 2) \in R \quad \text{¡Correcto!}$$

$$3 \in A \rightarrow (3; 3) \in R \quad \text{¡Correcto!}$$

Evidentemente, R es reflexiva.

Simétrica $(a;b) \in R \rightarrow (b;a) \in R$

$$(1;2) \in R \rightarrow (2;1) \in R \rightarrow \text{¡Correcto!}$$

Evidentemente, R es simétrica.

Transitiva $(a;b) \in R \wedge (b;c) \in R \rightarrow (a;c) \in R$

$$(1;1) \in R \wedge (1;2) \in R \rightarrow (1;2) \in R \quad \text{¡Correcto!}$$

$$(1;2) \in R \wedge (2;2) \in R \rightarrow (1;2) \in R \quad \text{¡Correcto!}$$

$$(1;2) \in R \wedge (2;1) \in R \rightarrow (1;1) \in R \quad \text{¡Correcto!}$$

Evidentemente, R es transitiva.

∴ R es una relación de equivalencia.

FUNCIONES

1. Definición :

Dada una relación F de A en B ($F \subset A \times B$), se dice que F es una función de A en B si y sólo si para cada $x \in A$ existe a lo más un elemento $y \in B$, tal que el par $(x;y) \in F$, es decir, que dos pares ordenados distintos no pueden tener la misma primera componente.

Ejemplo :

¿Cuál o cuáles de las siguientes relaciones,

$$R_1 = \{(2;1), (0;3), (-1;7)\}$$

$$R_2 = \{(3;0), (4;0), (5;1)\}$$

$$R_3 = \{(5;1), (4;-1), (4;2)\}$$

son funciones?

Resolución :

De acuerdo con la definición, se observa que:

R_1 es función

R_2 es función

R_3 no es función, ¿por qué?

Porque $(4;-1) \in R_3 \wedge (4;2) \in R_3$, siendo pares ordenados distintos.

1.1. Propiedad

Siendo F una función, se verifica lo siguiente :

$$(x;y) \in F \wedge (x;z) \in F \rightarrow y = z$$

2. Dominio y Rango de una función F

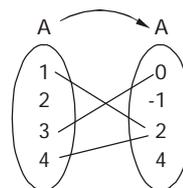
2.1. Dominio de F = Dom(F)

(D_F) denominado también pre imagen, es el conjunto de los primeros elementos de la correspondencia que pertenece al conjunto de partida.

2.2. Rango de F = Ran(F)

(R_F) denominado también imagen, recorrido o contra dominio, es el conjunto de segundos elementos de la correspondencia que pertenece al conjunto de llegada.

Ejemplo : Dada la relación funcional representada por el diagrama digital.



Determinar la función, indicando su dominio y rango.

Resolución :

Del diagrama, se tiene :

$$F = \{(1; 2), (3; 0), (4; 2)\}$$

De donde es evidente que :

$$D_F = \{1; 3; 4\} \wedge R_F = \{2; 0\}$$

2.3. Propiedad :

Sea F una función de A en B, luego se denota por:

$F : A \rightarrow B$ y se cumple lo siguiente :

$$D_F \subset A \wedge R_F \subset B$$

3. Aplicación

3.1. Definición

Dada una función F de A en B, $F : A \rightarrow B$. Se dice que F es una aplicación, si y sólo si, su dominio es igual al conjunto de partida.

$$F \text{ es aplicación} \leftrightarrow D_F = A$$

FUNCIÓN REAL DE VARIABLE REAL

1. Definición :

Dada una función F de A en B, $F : A \rightarrow B$, si A y B son subconjuntos de los números reales R, se afirmará que F es una función real de variable real.

$$F : A \rightarrow B, A \subset R \wedge B \subset R$$

Debido a ello, F tendrá una representación gráfica en el plano cartesiano (x.y), la cual viene dada por un conjunto de puntos generados al establecer la relación de correspondencia entre la variable independiente "x" y su imagen la variable dependiente "y", es decir :

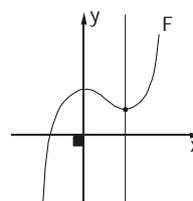
$$F = \{(x;y) \in R^2 / x \in D_F \wedge y = F(x)\}$$

la igualdad mostrada : $y = F(x)$ expresa la regla de correspondencia de la función real F.

1.1. Teorema

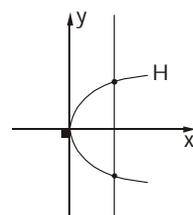
Toda recta vertical, trazada a la gráfica de una función, la corta sólo en un punto.

Fig. (1)



F corresponde a la gráfica de una función.

Fig. (2)



H no corresponde a la gráfica de una función.

1.2. Criterios para determinar el dominio y el rango

I. Para el Dominio :

Se despeja la variable "y", para luego analizar la existencia de su equivalente.

II. Para el Rango :

Se despeja la variable "x", para luego analizar la existencia de su equivalente.

A veces, el rango se determina a partir del dominio.

Observación : Frecuentemente, para determinar dominios y rangos es necesario reconocer la existencia de las expresiones dadas dentro del conjunto de los números reales, así pues, tenemos :

Ejemplo :

Determinar el dominio y el rango de la función F, donde :

- * $\frac{A}{B} \in R \leftrightarrow B \neq 0$
- * $\sqrt{A} \in R \leftrightarrow A \geq 0$

Ejemplo :

Determinar el dominio y el rango de la función F, donde :

$$F : R \rightarrow R / y = F(x) = \frac{2x+1}{x-3}$$

Resolución :

De acuerdo con los criterios para el dominio :

$$y = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$y \in \mathbb{R} \leftrightarrow x - 3 \neq 0$$

$$x \neq 3$$

$$x \in \mathbb{R} - \{3\}$$

$$\therefore D_F = \mathbb{R} - \{3\}$$

para el rango :

$$y = \frac{2x+1}{x-3}$$

$$xy - 3y = 2x + 1$$

$$xy - 2x = 3y + 1$$

$$(y - 2)x = 3y + 1$$

$$x = \frac{3y+1}{y-2}$$

$$x \in \mathbb{R} \leftrightarrow y - 2 \neq 0$$

$$y \neq 2$$

$$y \in \mathbb{R} - \{2\}$$

$$\therefore R_F = \mathbb{R} - \{2\}$$

Ejemplo :

Determinar el rango de la función, la cual viene dada por :

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x) = 2x - 3; x \in < 5; 10]$$

Resolución :

Observar que el rango se puede encontrar a partir del dominio, pues con $x \in < 5; 10]$ bastará determinar la extensión de : $y = 2x - 3$. Veamos :

Por condición : $x \in < 5; 10]$

de donde tenemos : $5 < x \leq 10$

multiplicando por 2 $10 < 2x \leq 20$

sumando -3 $7 < 2x - 3 \leq 17$

$$7 < y \leq 17$$

$$y \in < 7; 17]$$

observar que : $\therefore R_F = < 7; 17]$

2. Igualdad de Funciones

2.1. Definición

Dadas las funciones F y G, tal que :

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x)$$

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = G(x)$$

se dice que éstas son iguales : $F = G$, si y solo si verifican simultáneamente las condiciones :

I. $D_F = D_G$

II. $F(x) = G(x); \forall x \in D_F = D_G$

Ejemplo :

Dadas las funciones :

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x) = \frac{x}{x^2}$$

$$G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = G(x) = \frac{1}{x}$$

¿son iguales?

Resolución :

De acuerdo con la definición, veamos si se verifican las condiciones :

I. Para F : $y = \frac{x}{x^2}$

$$y \in \mathbb{R} \leftrightarrow x^2 \neq 0$$

$$x \neq 0 \rightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\therefore D_F = \mathbb{R} - \{0\}$$

II. Para G : $y = \frac{1}{x}$

$$y \in \mathbb{R} \leftrightarrow x \neq 0$$

$$x \neq 0 \rightarrow x \in \mathbb{R} - \{0\}$$

$$\therefore D_G = \mathbb{R} - \{0\}$$

Observar que : $D_F = D_G$.

II. Regla de correspondencia para F.

$$F : y = F(x) = \frac{x}{x^2}$$

como $x \neq 0$: $F(x) = \frac{1}{x}$

Regla de correspondencia para G.

$$G : y = G(x) = \frac{1}{x}$$

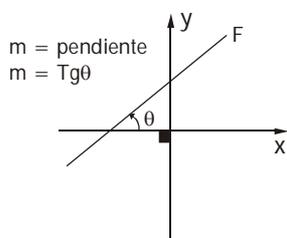
Observar que : $F(x) = G(x)$.

$\therefore F \wedge G$ son iguales

1. FUNCIONES ESPECIALES

1.1. Función Lineal

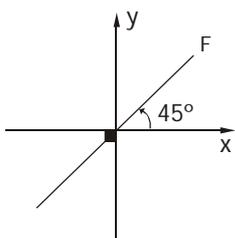
$$F : y = F(x) = mx + b$$



$$D_F = \mathbb{R} \wedge R_F = \mathbb{R}$$

1.2. Función Identidad

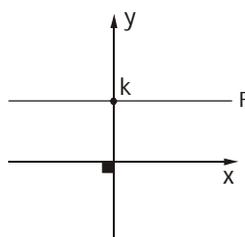
$$F : y = F(x) = x$$



$$D_F = \mathbb{R} \wedge R_F = \mathbb{R}$$

1.3. Función Constante

$$F : y = F(x) = k; k \in \mathbb{R}$$

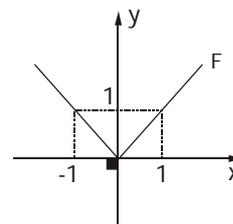


$$D_F = \mathbb{R} \wedge R_F = \{k\}$$

1.4. Función Valor Absoluto

$$F : y = F(x) = |x|$$

$$y = |x| = \begin{cases} x; & x > 0 \\ 0; & x = 0 \\ -x; & x < 0 \end{cases}$$

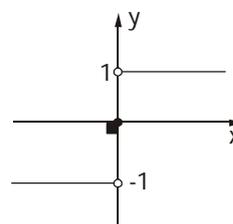


$$D_F = \mathbb{R} \wedge R_F = [0; \infty >$$

1.5. Función Signo

$$F : y = F(x) = \text{Sgn}(x)$$

$$y = \text{Sgn}(x) = \begin{cases} -1; & x < 0 \\ 0; & x = 0 \\ 1; & x > 0 \end{cases}$$

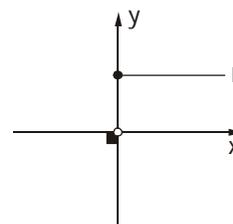


$$D_F = \mathbb{R} \wedge R_F = \{-1, 0, 1\}$$

1.6. Función Escalón Unitario

$$F : y = F(x) = u(x)$$

$$y = u(x) = \begin{cases} 0; & x < 0 \\ 1; & x \geq 0 \end{cases}$$



$$D_F = \mathbb{R} \wedge R_F = \{0; 1\}$$

1.7. Función Máximo Entero

$$F : y = F(x) = \llbracket x \rrbracket$$

Definición : Dado el número real "x", el máximo entero de "x" es la relación funcional denotada por $\llbracket x \rrbracket$ y definida como el mayor entero menor o igual que "x", veamos algunos ejemplos :

* $\llbracket 3;15 \rrbracket = 3$ ¿por qué?

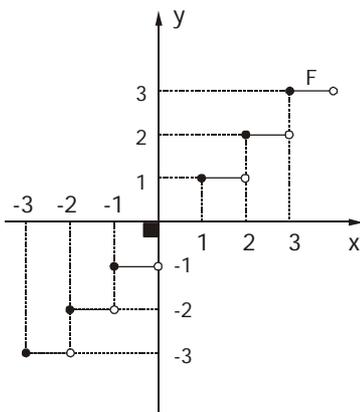
Porque $3 \leq 3;15$

* $\llbracket 4 \rrbracket = 4$ ¿por qué?

Por que $4 \leq 4$

Teorema :

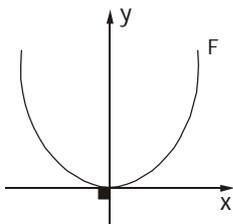
$$\llbracket x \rrbracket = y \Leftrightarrow y \leq x < y + 1; y \in \mathbb{Z}$$



$$D_F = \mathbb{R} \wedge R_F = \mathbb{Z}$$

1.8. Función Cuadrática Simple :

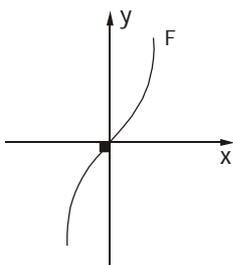
$$F : y = F(x) = x^2$$



$$D_F = \mathbb{R} \wedge R_F = [0; \infty >$$

1.9. Función Cúbica Simple :

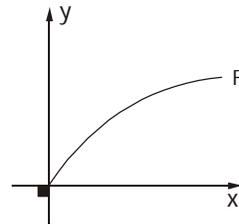
$$F : y = F(x) = x^3$$



$$D_F = \mathbb{R} \wedge R_F = \mathbb{R}$$

1.10. Función Raíz Cuadrada :

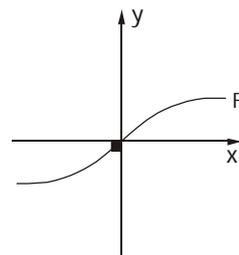
$$F : y = F(x) = \sqrt{x}$$



$$D_F = [0; \infty > \wedge R_F = [0; \infty >$$

1.11. Función Raíz Cúbica

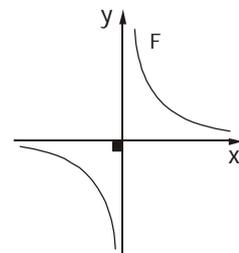
$$F : y = F(x) = \sqrt[3]{x}$$



$$D_F = \mathbb{R} \wedge R_F = \mathbb{R}$$

1.12. Función Inverso Multiplicativo

$$F : y = F(x) = \frac{1}{x}$$

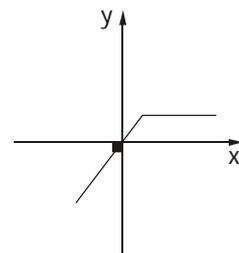


$$D_F = \mathbb{R} - \{0\} \wedge R_F = \mathbb{R} - \{0\}$$

2. DESPLAZAMIENTOS Y GIROS DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

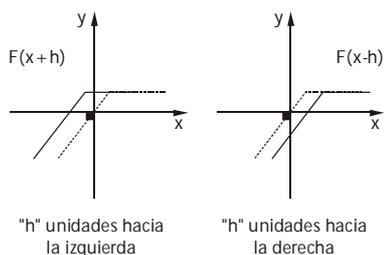
Conociendo la gráfica de la función F, donde:

$$F : y = F(x)$$

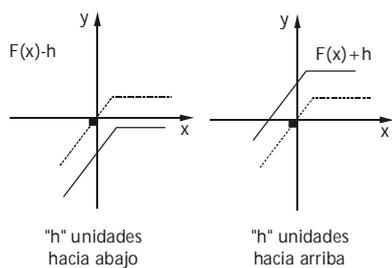


y considerando un número positivo "h", tenemos :

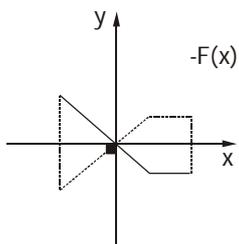
2.1. Desplazamiento Horizontal



2.2. Desplazamiento Vertical

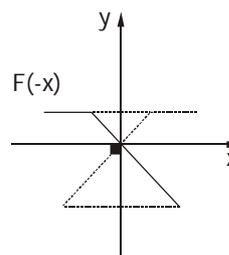


2.3. Giro con respecto al eje "x"



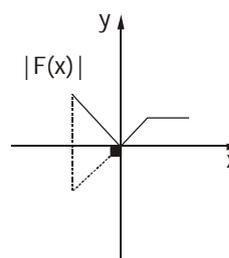
El eje "x" se comporta como si fuese un espejo.

2.4. Giro con respecto al eje "y"



El eje "y" se comporta como si fuese un espejo.

2.5. Giro producido por el valor absoluto



La parte de la gráfica debajo del eje "x", se refleja por encima del mismo.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Determinar el valor de "m.n", si se cumple que :

$$(m+n; 3) = (9; 2m-n)$$

- a) 10 b) 20 c) 30
d) 40 e) 50

02. Sean los conjuntos :

$$A = \{x \in \mathbb{Z} / -12 \leq 6x < 18\} \text{ y}$$

$$B = \{x \in \mathbb{Z} / x^2 \leq 9\}$$

Calcular el número de elementos que contiene el producto cartesiano $A \times B$.

- a) 40 b) 35 c) 30
d) 25 e) 20

03. Sean los conjuntos :

$$A = \{1; 2; 3\} \wedge B = \{2; 4; 6\}$$

Determinar por extensión la relación R, de A en B, definida por :

$$R = \{(x; y) \in A \times B / y = 2x\}$$

- a) $R = \{(1; 2), (2; 4)\}$
b) $R = \{(0; 1), (2; 4), (3; 5)\}$
c) $R = \{(1; 2), (2, 4), (3; 6)\}$
d) $R = \{(1; 2), (2; 4), (4; 8)\}$
e) $R = \{(2; 4), (1; 6)\}$

04. Sea el conjunto : $A = \{1; 2; 3\}$ y sean las relaciones R, S y T definidas en A; donde R, S y T son reflexiva, simétrica y transitiva, respectivamente; si :

$$R = \{(1; a), (2; 3), (2; b), (3; c)\}$$

$$S = \{(1; 3), (e; d)\}$$

$$T = \{(1; 2), (2, 3), (f; g)\}$$

Calcular el valor de : $a+b+c+d+e+f+g$.

- a) 12 b) 14 c) 16
d) 18 e) 20

05. ¿Cuál o cuáles de los siguientes conjuntos representa a una función?

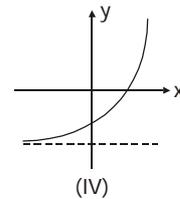
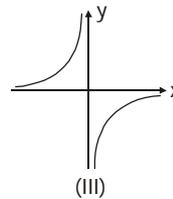
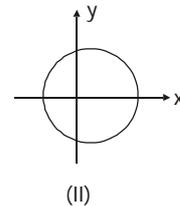
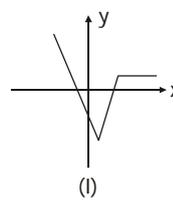
I. $F = \{(2; 3), (2; 4), (3; 4)\}$

II. $G = \{(3; 1), (-1; 4), (4; 3)\}$

III. $H = \{(-2; 2), (-1; 3), (2; 3), (4; 2)\}$

- a) Sólo I b) Sólo II c) Sólo III
d) I y III e) II y III

06. ¿Cuál o cuáles de las siguientes gráficas representa a una función?



- a) Sólo I b) Sólo II y III c) Sólo I y IV
d) I, III y IV e) II y IV

07. Calcular el valor de "ab", si el conjunto :

$$F = \{(2; 5), (-1; 7); (2; a+2b); (3; a-9); (3; 2b)\}$$

representa una función.

- a) -5 b) -6 c) -7
d) -8 e) -9

08. Del problema anterior, dar la suma de elementos del dominio y rango de la función.

- a) 8 b) 10 c) 12
d) 14 e) 16

09. Dadas las funciones :

$$F = \{(2; 6), (3; b), (3; a-b), (d; a)\}$$

$$G = \{(4; d+1), (4; 6), (\pi; b)\}$$

Calcular : $F(2) + F(d-2) - F(d) + G(\pi)$

- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

10. Determinar el dominio de la siguiente función :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+5}}{x^2-4}$$

- a) $[-5; +\infty) - \{-2; 2\}$
b) $< -5; +\infty >$ c) $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$
d) $[-5; +\infty >$ e) $< -2; 2 >$

11. Determinar el dominio de la siguiente función :

$$g(x) = \frac{4x+1}{2x+3} - \frac{3x+2}{5x-1}$$

- a) $R - \{2; \frac{3}{5}\}$ b) $R - \{-\frac{3}{5}; -2\}$
 c) $R - \{-\frac{3}{2}; \frac{1}{5}\}$ d) $R - \{4; 1\}$
 e) $R - \{-2\}$

12. Determinar el dominio de :

$$h(x) = \sqrt[4]{x+3} + \sqrt{7-x} - \frac{3}{x^2-1}$$

- a) $[-3; 7] - \{1\}$ b) $[-3; -1] \cup]1; 7]$
 c) $[-3; 7] - \{-1; 1\}$ d) $< -3; 7 > - \{-1; 1\}$
 e) $R - \{-1; 1\}$

13. Determinar el rango de :

$$f(x) = \frac{4-3x}{x+5}$$

- a) $R - \{3\}$ b) $R - \{-3\}$
 c) $< -\infty; -5 > \cup < -5; +\infty >$
 d) $[\frac{4}{3}; +\infty >$ e) $R - \{-5\}$

14. Indicar el rango de :

$$H = \left\{ (x, y) / y = \frac{x}{x-3} \right\}$$

- a) $R - \{-3\}$ b) R c) $R - \{1\}$
 d) $R - \{0\}$ e) $R - \{3\}$

15. Hallar el rango de la función :

$$f(x) = x^2 - 3$$

- a) $[3; +\infty >$ b) $[-3; 0 >$ c) $[-3; +\infty >$
 d) $[0; +\infty >$ e) $< -\infty; +\infty >$

16. Determinar el rango de la función :

$$f(x) = x^2 + 31$$

- a) $[31; +\infty >$ b) $< -\infty; 31]$ c) R
 d) R e) $R - \{31\}$

17. Determinar el rango de la función F, donde:

$$F : [5; 8 > \rightarrow [15; 30 > / y = F(x) = 2x + 5$$

- a) $[10; 13 >$ b) $[15; 21 >$ c) $< 10; 13]$
 d) $[15; 30 >$ e) $[35; 65 >$

18. Sea la función :

$$F : R \rightarrow R / y = F(x) = \sqrt{2x+3} ; x \in < 3; 11]$$

Determinar el rango de F(x).

- a) $< 3; 5 >$ b) $[3; 5 >$ c) $< 3; 5]$
 d) R_0^+ e) $[3; 5 > \cup \{2\}$

19. Sea : $f(x) = \frac{\sqrt{6-x}}{x-4} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x-2}}$ con dominio en el conjunto Z. Hallar la suma de elementos del rango.

- a) 14 b) $\frac{2\sqrt{3}+1}{2}$
 c) $\frac{4+\sqrt{3}}{2}$ d) $\frac{5\sqrt{3}+2}{2}$
 e) 18

20. Determinar el rango de la función F, donde:

$$F : R \rightarrow R / y = F(x) = x^2 + 4x + 7 ; x \in < -5; 4]$$

- a) $[12; 39]$ b) $[2; 11]$ c) $[3; 39]$
 d) $< 12; 39]$ e) $< 12; 39 >$

21. Sea la función :

$$F : R \rightarrow R / y = F(x) = 16 - 4x - x^2 ; x \in [-8; 2 >$$

Determinar el rango de dicha función.

- a) $[-20; 16 >$ b) $< -20; 16]$
 c) $[-16; +20]$ d) $< -16; 20 >$
 e) $R - < -6; +\infty >$

22. Determinar el rango de la función :

$$g(x) = x^2 + 6x + 4$$

- a) $< -\infty; -5 >$ b) $[-5; +\infty >$
 c) $< -5; 5 >$ d) $[-5; 5]$
 e) $< -\infty; -5]$

23. Sea la función :

$$F = \left\{ (x, y) \in R^2 / y = \frac{3}{x^2+9} \right\}$$

se sabe que su rango es : $< a; b]$.

Hallar : $9b + a$.

- a) 2 b) 1 c) 3
 d) 0 e) 4

24. Dada la función :

$$F(x) = 2x^2 + 3x + 2 ; x \in \mathbb{R}$$

donde : $\text{Ran}(F) = \left[\frac{a}{a+1}; \infty > \right)$

Calcular "a".

- a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

25. Determinar el rango de la función real de variable real, cuya regla de correspondencia es :

$$y = F(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$$

- a) $[-1; 1]$ b) $< -1; 1 >$ c) $[-1; \infty >$
d) $[0; 1]$ e) $< -\infty; 0]$

26. Determinar el menor valor que asume la función real de variable real cuya regla de correspondencia es :

$$y = F(x) = \frac{x^2 + 1}{2x^2 + x + 2}$$

- a) 2/5 b) 2/3 c) 5/2
d) 5/3 e) 1

27. Sea la función : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / f(x) = A$

$A \in \mathbb{Q}^-$, llamada función constante.

Se sabe que : $f^2(2005) + f(1003) = 12$.

Hallar : $E = \sum_{k=1}^{10} f(k)$.

- a) -40 b) -20 c) 30
d) 20 e) 40

28. Si : $< a; b]$ es el dominio de la función F, definida por:

$$F = \left\{ \left(\frac{2x+1}{2x+3}; x \right) \in \mathbb{R}^2 / x \in < 0; 10] \right\}$$

entonces, la relación correcta entre los valores de "a" y "b", es :

- a) $a + 3b = 25$ b) $3a + 6b = 10$
c) $6a + 23b = 25$ d) $6a + 46b = 44$
e) $5a + 6b = 36$

29. Si tenemos :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & ; x \in [0; 2 > \\ 2x + 1 & ; x \in [2; 5 > \end{cases}$$

si : $x \in [1; \frac{3}{2} >$.

Hallar : $f(2x - 1) - f(2x^2)$.

- a) 14 b) $2x - 1$ c) $-4x$
d) x^2 e) $2x$

30. Dada la función :

$$f(t) = \frac{|3+t| - |t| - 3}{t}; \text{ redefina la función en los intervalos de :}$$

$< -\infty; -3 >$, $[-3; 0 >$ y $[0; +\infty >$

Luego, calcular : $5f_{(-5)} + f_{(-1)} - f_{(4)}$

- a) 8 b) 6 c) 4
d) 2 e) -10

31. Para la función :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 + |x - 10| + |x| ; 2 \leq x \leq 10 .$$

"A" es el menor valor real y "B" es el mayor valor real.

Tal que : $B \leq f(x) \leq A$.

$\forall x \in [2; 10]$. Hallar : $A + B$.

- a) 80 b) 96 c) 103
d) 106 e) 115

32. Hallar el rango de :

$$G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = \sqrt{5-x} + \sqrt{3+x}\}$$

- a) $y \in [\sqrt{2}; 4]$ b) $y \in [0; 4]$
c) $y \in \mathbb{R}$ d) $y \in [2\sqrt{2}; 4]$
e) $y \in [0; 2\sqrt{2}]$

33. Determinar el dominio de la función F, donde :

$$F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} / y = F(x) = \sqrt{3 + \sqrt{2 - \sqrt{x}}}$$

- a) $< 0; \infty >$ b) $[0; \infty >$ c) $[0; 4]$
d) $[0; 4 >$ e) $[-4; 4]$

34. Hallar el dominio de :

$f(x) = \sqrt{|x-3| + x - \sqrt{-x}}$, e indicar el número de valores enteros que posee.

- a) Infinitos b) 8 c) 9
d) 10 e) 11

35. Sea la función polinomial : $f(x) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = x^6 - 3x^4 + 3x^2 - 12$; encontrar su dominio, si su rango es $[-12; 16 >$.

- a) $[1; \infty >$ b) $< -16; 12 >$
c) $< -2; 2 >$ d) $< -1; 4 >$
e) $< -4; 1]$

36. Dada la función :

$$F(x) = \sqrt[n]{a^n - x^n}; n \in \mathbb{N} \wedge a > 0$$

- I. $\text{Dom}(F) = \mathbb{R}; \forall n$ impar
- II. $\text{Dom}(F) = [-a; a] \forall n$ par
- III. $F(x) = F(-x); \forall n$ par

Indicar el valor de verdad.

- a) VVV b) VVF c) VFV
- d) FFV e) FFF

37. ¿Qué conjuntos de pares ordenados son funciones?

$$A = \{(t^2 + 3; t) / t \in \mathbb{R}\}$$

$$B = \{(t + 5; t) / t \in \mathbb{R}\}$$

$$C = \{(t^2 - 1; t) / t \in \mathbb{R}\}$$

$$D = \{(3t + 2; t) / t \in \mathbb{R}\}$$

- a) Sólo B. b) A y B. c) Sólo B.
- d) Todos. e) B y D.

38. Calcular el rango de la función :

$$f(x) = -\sqrt{2x - \sqrt{x}}$$

$$\text{Si: } D_f = x \in [1; 9].$$

- a) $< 1; \sqrt{15} >$ b) $< -1; \sqrt{15} >$
- c) $< \sqrt{15}; 1 >$ d) $[-\sqrt{15}; -1]$
- e) $< 0; \sqrt{15} >$

39. Determinar el rango de la función :

$$F(x) = (|x - 5| + 1 + x) \sqrt{5 - x}$$

- a) $[0; \infty >$ b) $< -1; \infty >$ c) $< -\infty; 0]$
- d) \mathbb{R} e) $< -\infty; 4]$

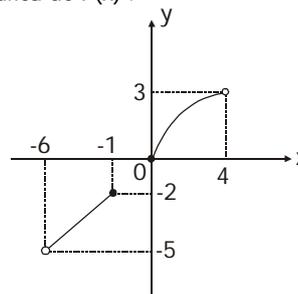
40. Sea la función lineal : $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ cuya regla de correspondencia es :

$$f(x) = |ax^2 - 3ax + a - 2| + ax^2 - ax + 3$$

indicar los valores del parámetro real "a", que definen completamente la función "f".

- a) $a \in < 0; 8/5 >$ b) $a \in < 1; 5/3 >$
- c) $a \in < -\frac{8}{5}; 1 >$ d) $a \in \mathbb{R}$
- e) $a \in < -\frac{8}{5}; 0 >$

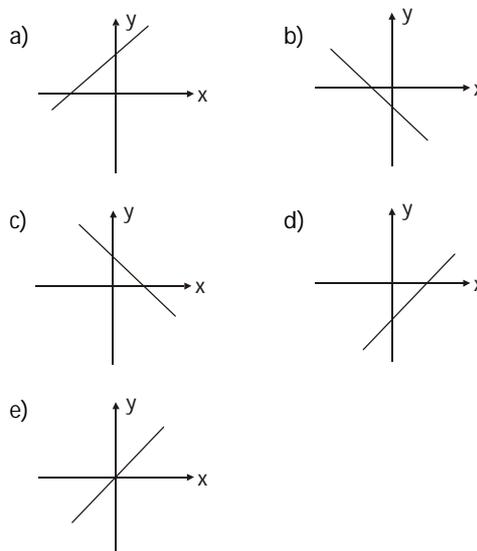
41. Dada la gráfica de F(x) :



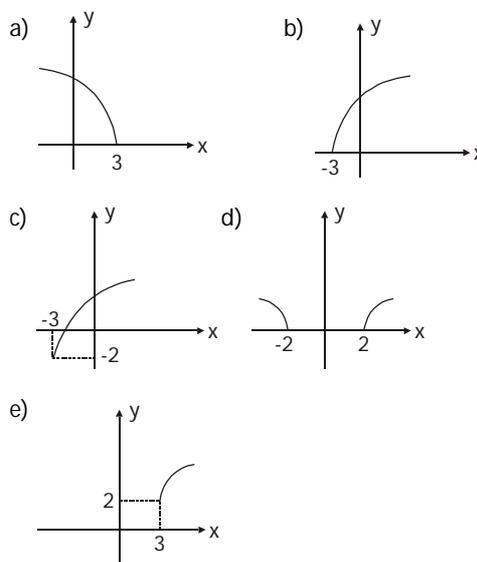
Indicar lo correcto :

- a) $\text{Dom}(F) = < -5; -2 > \cup < 0; 3]$
- b) $\text{Ran}(F) = [-5; -2 > \cup < 0; 3]$
- c) $\text{Ran}(F) = < -6; -1 > \cup < 0; 4]$
- d) $\text{Dom}(F) = < -6; -1 > \cup [0; 4 >$
- e) $\text{Ran}(F) = < -2; 0 >$

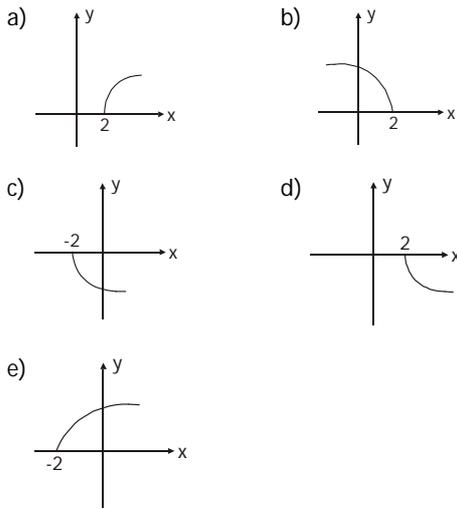
42. Graficar : $F(x) = 3x - 2$



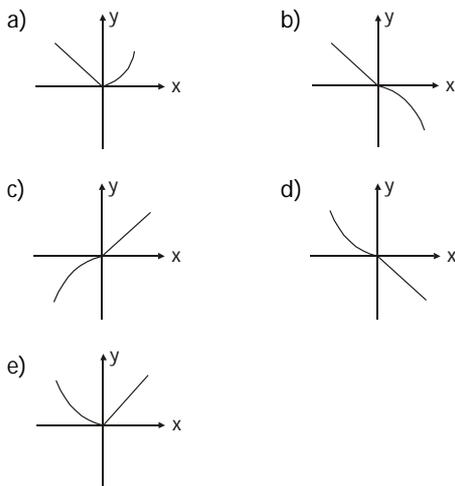
43. Graficar la función : $F(x) = \sqrt{x - 3} + 2$



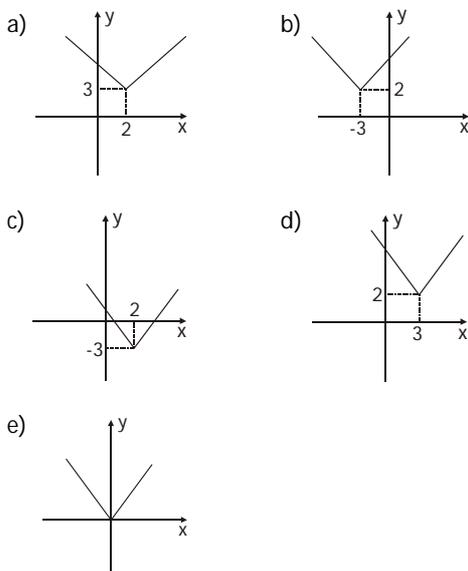
44. Graficar : $F(x) = -\sqrt{x-2}$



45. Graficar : $F(x) = \begin{cases} x^2; & \text{si } x < 0 \\ x; & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$



46. Graficar : $F(x) = |x-3| + 2$



47. Luego de graficar : $F(x) = -x^2 + 6x - 14$, se obtiene una parábola cuyo vértice está dado por el par ordenado (a; b). Calcular : a + b.

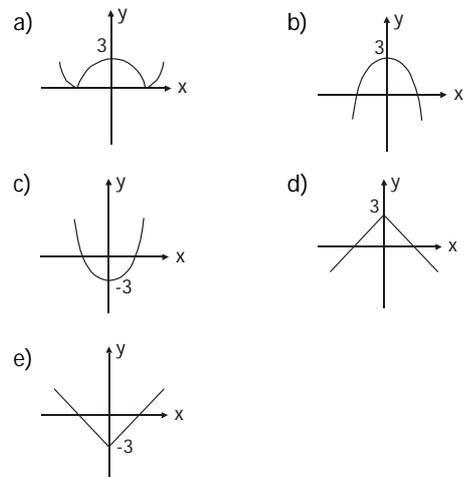
- a) 8 b) 2 c) -2
d) -8 e) 5

48. Hallar el área de la región formada por las gráficas de las funciones F y G, tales que :

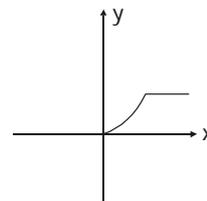
$$F(x) = |x-5| \text{ y } G(x) = 3.$$

- a) $6u^2$ b) 8 c) 9
d) 12 e) 16

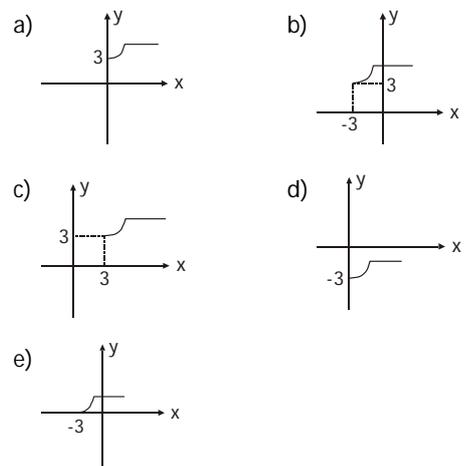
49. Graficar : $F(x) = |x^2 - 3|$



50. Se tiene la gráfica de la función F(x) :



¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a : $H(x) = F(x-3) + 3$?



51. Obtener la pendiente de :

$$F(x) = Ax + B + 2$$

sabiendo que la gráfica $F(x)$ pasa por el punto $(8; 38)$ y por el punto $(0; -2)$.

- a) -2 b) 4 c) 3
d) 5 e) 1
52. Hallar el área de la región formada por las gráficas de las funciones :

$$f(x) = abx - b^2; \quad ab > 0$$

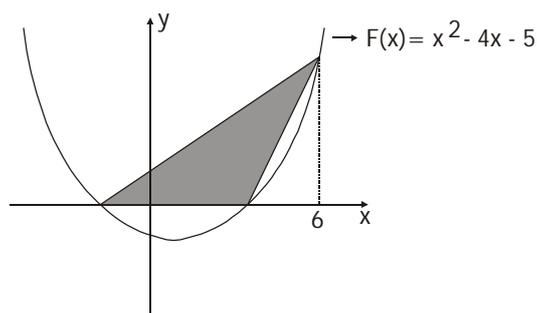
$$g(x) = 2b^2$$

con el eje de las ordenadas.

a) $\frac{9b^3}{a}u^2$ b) $\frac{2a}{9b^3}$ c) $\frac{2b^3}{9a}$

d) ab e) $\frac{9b^3}{2a}$

53. Hallar el área de la región sombreada :



a) $21 u^2$ b) 42 c) 28
d) 14 e) 24

54. En la función : $f(x) = (x - a)^2 + b$.
El valor de "x" que hace que la función acepte a 7 como mínimo valor, es 7.
Hallar "ab".

a) 7 b) 14 c) 49
d) - 49 e) 0

55. La función cuadrática :

$$f(x) = -2x^2 + 12x + 1$$

tiene un máximo o un mínimo.
¿Cuál es su valor?

a) Un mínimo, 19. b) Un máximo, 19.
c) Un máximo, 3. d) Un mínimo, 3.
e) Un máximo, 20.

56. La ganancia de cierta compañía está dada por :

$$G(x) = -2x^2 + 60x + 1500$$

Encontrar la ganancia máxima.

a) 1945 b) 1950 c) 1955
d) 1960 e) 1965

57. Hallar los puntos de intersección de las gráficas de :

$$f(x) = x^2 - 2x + 3 \quad \text{y} \quad g(x) = 5x - 9$$

e indicar la suma de coordenadas de uno de ellos.

a) 7 b) 8 c) 15
d) 16 e) 20

58. Dadas las funciones :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 4$$

$$g(x) = -7x^2 - 3px + p$$

se elige "p", de manera que sus gráficas tengan un único punto en común. Entonces, las coordenadas (x; y) de dicho punto son :

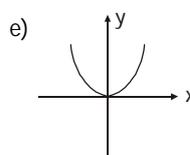
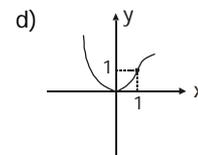
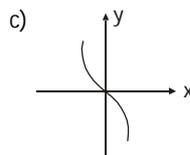
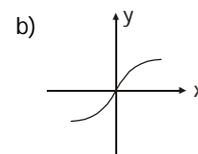
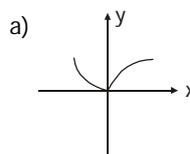
a) (0 ; 0) b) (1 ; 1) c) (-1 ; 3)
d) (1 ; 3) e) (1 ; -3)

59. Determinar el área de la región formada por la función: $F(x) = -|x| + 4$ y el eje de las abscisas.

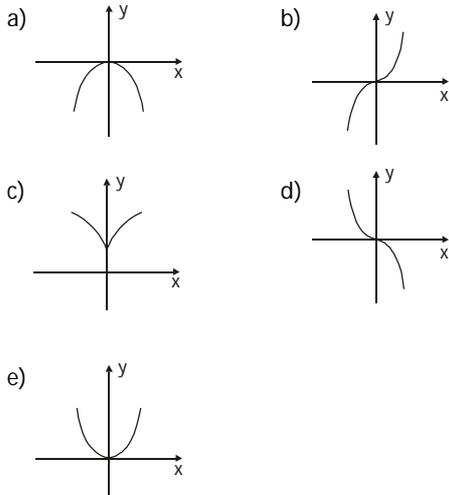
a) $8 u^2$ b) 12 c) 14
d) 16 e) 32

60. Graficar :

$$F(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & ; x \geq 1 \\ x^2 & ; x < 1 \end{cases}$$



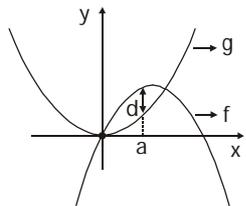
61. La gráfica de la función :
 $F(x) = x|x|$; es :



62. Las gráficas corresponden a las funciones:

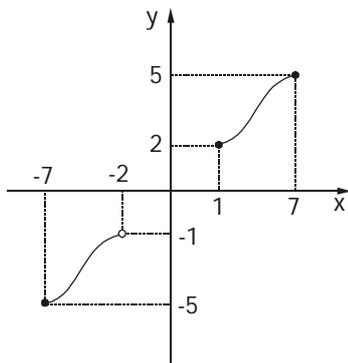
$$f(x) = -x^2 + 2x \wedge g(x) = \frac{1}{2}x^2$$

si la máxima longitud vertical "d" se encuentra en la abscisa "a". Calcular "a".



- a) 1 b) 3/2 c) 2/3
 d) 1/3 e) 3/4

63. Dada la gráfica de $F(x)$:



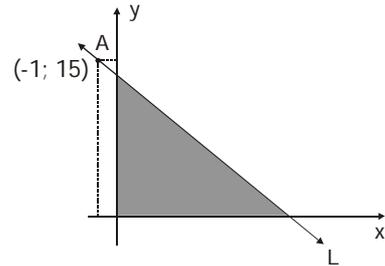
se cumple :

$$\text{Dom}(F) \cap \text{Ran}(F) = [a; b] \cup [c; d]$$

Calcular : $a + b + c + d$.

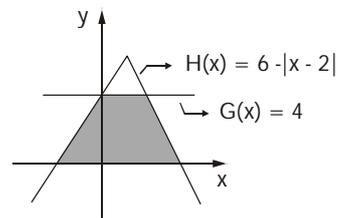
- a) 0 b) 1 c) -3
 d) 13 e) -13

64. Hallar el área del triángulo sombreado, si "L" es una recta cuya pendiente (-3).



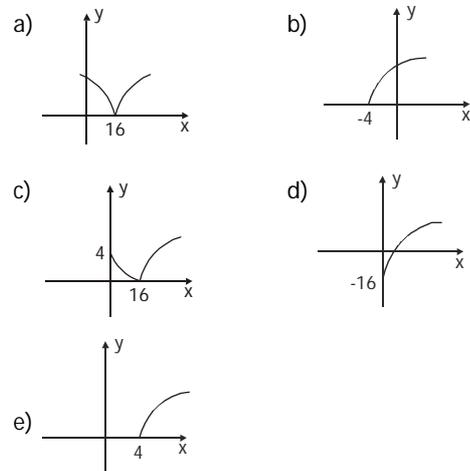
- a) $15 u^2$ b) 21 c) 24
 d) 28 e) 32

65. Calcular el área de la región sombreada limitada por las funciones indicadas.



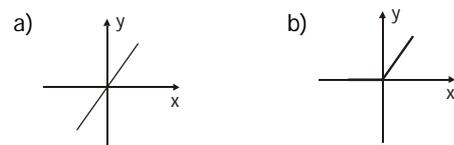
- a) 24 b) 32 c) 48
 d) 16 e) 20

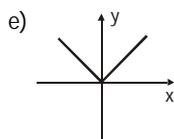
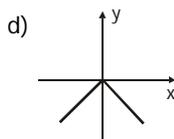
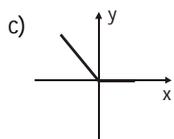
66. Graficar : $F(x) = |\sqrt{x} - 4|$



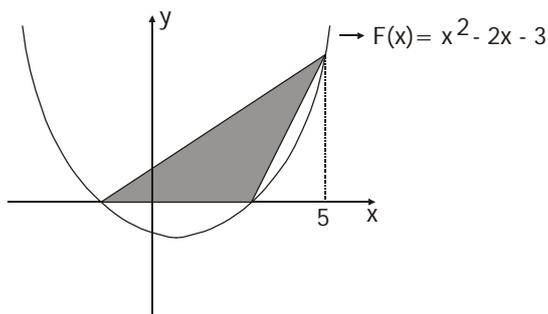
67. Indicar la gráfica de la función :

$$F(x) = x + \sqrt{x^2}$$





68. Hallar el área de la región sombreada :



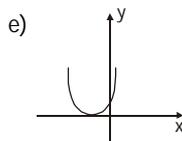
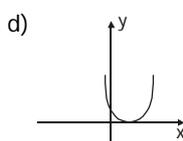
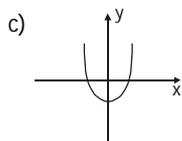
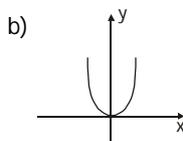
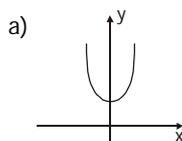
- a) 36 u^2 b) 18 c) 24
d) 12 e) 25

69. ¿Cuál de los siguientes puntos no está en la gráfica?

$$y = \frac{x}{x+1}$$

- a) (0; 0) b) $(-\frac{1}{2}; -1)$ c) $(\frac{1}{2}; \frac{1}{3})$
d) (-1; 1) e) (-2; 2)

70. Graficar : $F(x) = x^2 + 2mx + m^2$.
Si : $m < 0$.

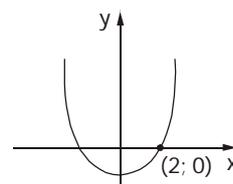


71. Si "h" es una función lineal de pendiente 3 e intersección con el eje "y" igual a 5, hallar la regla de correspondencia de la función g(x), si:

$$g(x) - x = h(1) + h(x+1)$$

- a) $g(x) = 4x + 4$ b) $g(x) = 4x + 16$
c) $g(x) = 4x + 12$ d) $g(x) = 3x + 13$
e) $g(x) = 3x + 12$

72. En el siguiente gráfico :



Hallar la ecuación de la parábola si el punto (3, 2) pertenece a ella y su rango es el intervalo $[-\frac{1}{4}; +\infty >$.

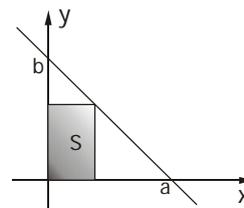
- a) $x^2 - 3x + 2 = y$ b) $y = x^2 + 3x + 2$
c) $y = x^2 - 3x - 2$ d) $2x^2 + 3x + 2 = y$
e) $2x^2 - 3x - 2 = y$

73. Indicar cuántos puntos de la forma (a; b) donde :
a y b $\in \mathbb{Z}$ se encuentran dentro de la zona limitada por las funciones :

$$F(x) = (x+2)(x-2) \text{ y } G(x) = (2+x)(2-x)$$

- a) 21 b) 19 c) 14
d) 12 e) 17

74. De la gráfica :



Si el área "S" del rectángulo es máxima, hallar dicha área.

- a) ab b) $\frac{ab}{2}$ c) $\frac{ab}{4}$
d) $\frac{ab}{3}$ e) $\frac{ab}{6}$

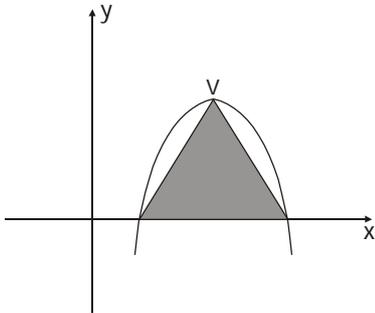
75. Un rectángulo tiene dos de sus lados sobre los ejes coordenados y el cuarto vértice sobre la recta de ecuación $y = -2x + 8$. El área máxima que puede tener el rectángulo es igual a :

- a) 8 b) 9 c) 10
d) 11 e) 12

76. Sea f , una función de proporcionalidad, tal que : $f(3) + f(7) = 20$. Entonces, el valor del producto : $f(21/5) f(5) f(7)$, es :

- a) 147 b) 1470 c) 1170
d) 1716 e) 1176

77. Dado el gráfico :



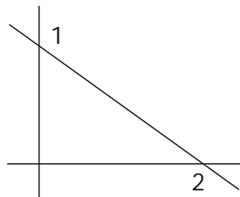
Donde :

$$F(x) = -x^2 + 6x - 8$$

Hallar el área de la región sombreada. (V : vértice de la parábola).

- a) $1 u^2$ b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

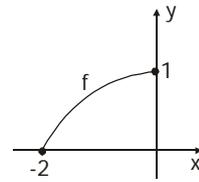
78. Si la gráfica adjunta, representa a : $y = f(x)$



¿Cuál de las gráficas representa a : $y = f(-x)$?

- a) b)
- c) d)
- e)

79. Según el gráfico de " f ".



Indicar el gráfico : $H(x) = f(-x) - 1$.

- a) b)
- c) d)
- e)

80. Dada la función " f " cuya regla de correspondencia es $f(x) = x^2 - 2x + a$. Entonces, podemos afirmar que los gráficos adjuntos corresponden :

- I. II.
- III.

- a) El gráfico II ocurre cuando $a > 1$.
b) El gráfico II ocurre cuando $a < 1$.
c) El gráfico III ocurre cuando $a = 1$.
d) El gráfico I ocurre cuando $a < 1$.
e) El gráfico II ocurre cuando $a > 1$.

Claves

01.	<i>b</i>	21.	<i>c</i>	41.	<i>d</i>	61.	<i>b</i>
02.	<i>c</i>	22.	<i>b</i>	42.	<i>d</i>	62.	<i>c</i>
03.	<i>c</i>	23.	<i>c</i>	43.	<i>e</i>	63.	<i>a</i>
04.	<i>b</i>	24.	<i>b</i>	44.	<i>d</i>	64.	<i>c</i>
05.	<i>e</i>	25.	<i>a</i>	45.	<i>e</i>	65.	<i>b</i>
06.	<i>d</i>	26.	<i>a</i>	46.	<i>d</i>	66.	<i>c</i>
07.	<i>c</i>	27.	<i>a</i>	47.	<i>c</i>	67.	<i>b</i>
08.	<i>d</i>	28.	<i>d</i>	48.	<i>c</i>	68.	<i>b</i>
09.	<i>c</i>	29.	<i>c</i>	49.	<i>a</i>	69.	<i>d</i>
10.	<i>a</i>	30.	<i>a</i>	50.	<i>c</i>	70.	<i>d</i>
11.	<i>c</i>	31.	<i>d</i>	51.	<i>d</i>	71.	<i>b</i>
12.	<i>c</i>	32.	<i>d</i>	52.	<i>e</i>	72.	<i>a</i>
13.	<i>b</i>	33.	<i>c</i>	53.	<i>a</i>	73.	<i>e</i>
14.	<i>c</i>	34.	<i>d</i>	54.	<i>c</i>	74.	<i>c</i>
15.	<i>c</i>	35.	<i>c</i>	55.	<i>b</i>	75.	<i>a</i>
16.	<i>a</i>	36.	<i>a</i>	56.	<i>b</i>	76.	<i>e</i>
17.	<i>b</i>	37.	<i>e</i>	57.	<i>c</i>	77.	<i>a</i>
18.	<i>c</i>	38.	<i>d</i>	58.	<i>d</i>	78.	<i>d</i>
19.	<i>c</i>	39.	<i>a</i>	59.	<i>d</i>	79.	<i>d</i>
20.	<i>c</i>	40.	<i>e</i>	60.	<i>d</i>	80.	<i>b</i>

