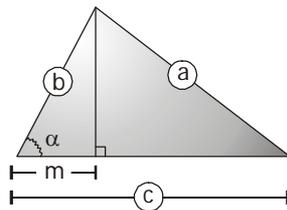


Capítulo 11

RELACIONES MÉTRICAS EN CUALQUIER TRIÁNGULO

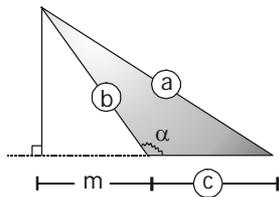
I. TEOREMA DE EUCLIDES

Primer Caso ($\alpha < 90^\circ$)



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cm$$

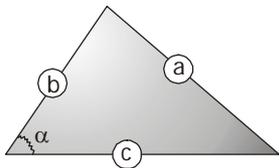
Segundo Caso ($\alpha > 90^\circ$)



$$a^2 = b^2 + c^2 + 2cm$$

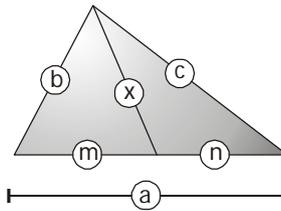
Observaciones :

De aquí, se deduce la importante relación denominada "Ley de Cosenos", que es válida para todo triángulo.



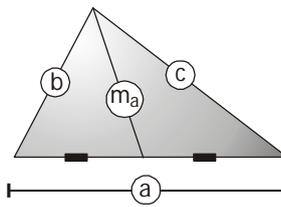
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2cb \cdot \text{Cos}\alpha$$

II. TEOREMA DE STEWART



$$x^2 \cdot a = b^2 \cdot n + c^2 \cdot m - mna$$

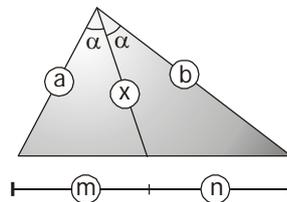
III. TEOREMA DE LA MEDIANA



$$2m_a^2 + \frac{a^2}{2} = b^2 + c^2$$

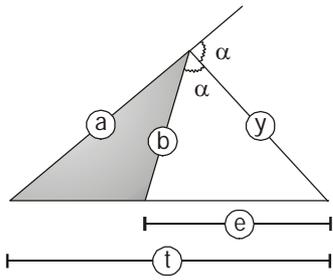
IV. CÁLCULO DE LA BISECTRIZ

*** Interior**



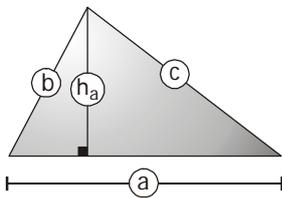
$$x^2 = a \cdot b - m \cdot n$$

*** Exterior**



$$y^2 = t \cdot e - a \cdot b$$

V. CÁLCULO DE LA ALTURA (Teorema de Herón)



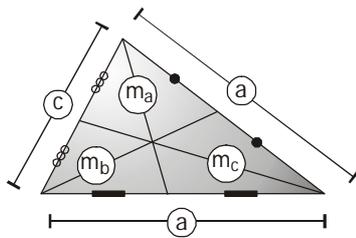
Semiperimetro : p

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

$$h_a = \frac{2}{a} \cdot \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

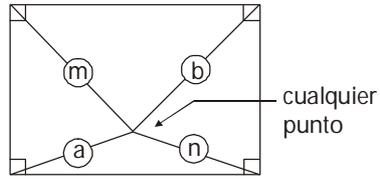
Observaciones

*** En todo triángulo**



$$\frac{m_a^2 + m_b^2 + m_c^2}{a^2 + b^2 + c^2} = \frac{3}{4}$$

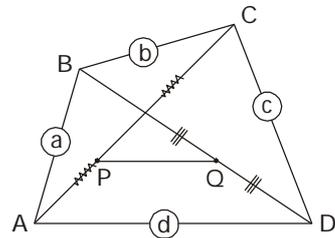
*** En el rectángulo**



$$a^2 + b^2 = m^2 + n^2$$

VI. TEOREMA DE LEONARD EULER

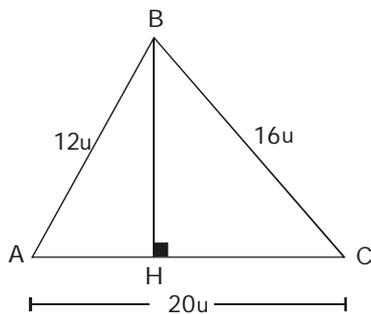
* Válido para todo cuadrilátero.



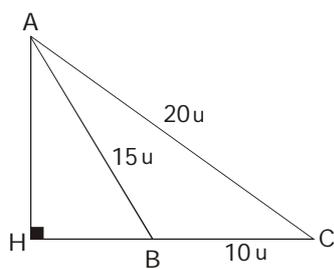
\overline{PQ} : segmento que une los puntos medios de las diagonales.

Test de aprendizaje preliminar

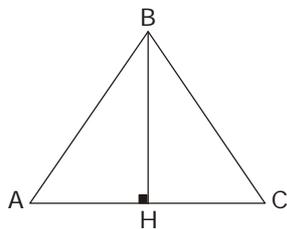
01. Calcule HC.



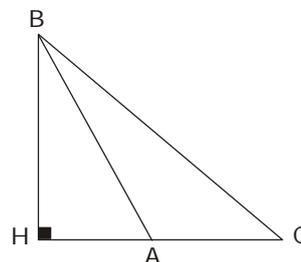
02. Calcule HB.



03. Calcule AH, si : $AB = 37$ u, $BC = 15$ u y $AC = 44$ u.

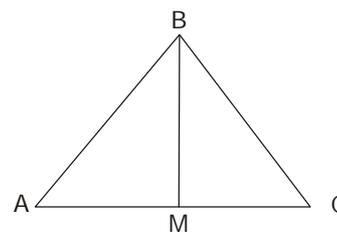


04. Calcule HA, si : $AB = 17$ u, $BC = 25$ u y $AC = 12$ u.

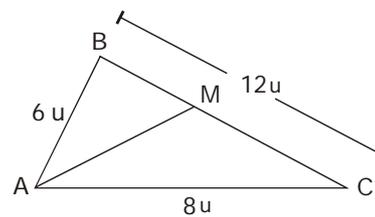


05. Calcule la mediana BM.

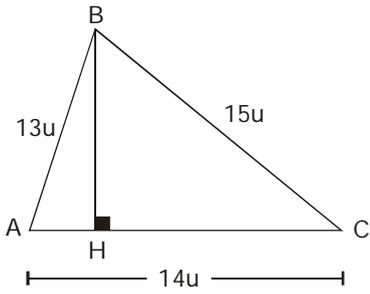
Si : $AB = 8$ u, $BC = 12$ u y $AC = 6$ u.



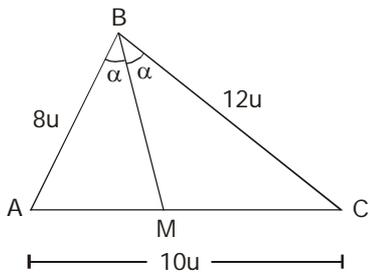
06. Si : $BM = MC$, calcule AM.



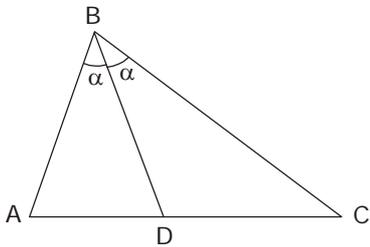
07. Calcule BH.



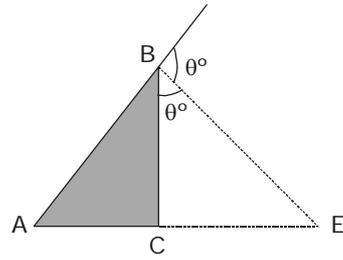
08. Calcule BM.



09. Calcule BD, si : $AB = 4u$, $BC = 6u$ y $AC = 5u$.

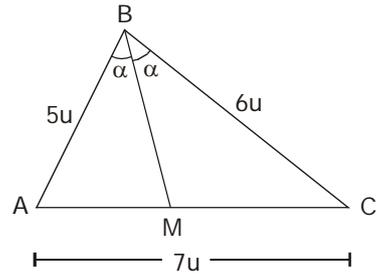


10. Calcule BE, si : $AB = 4u$, $BC = 3u$ y $AC = 2u$.

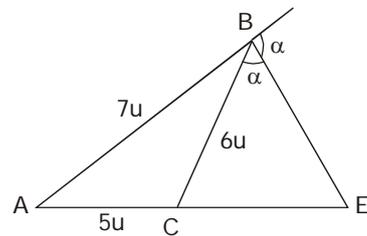


Practiquemos :

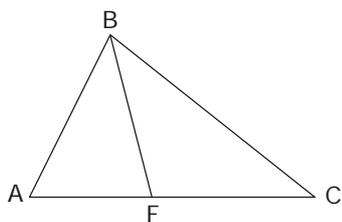
11. En el gráfico, calcule BM.



12. En el gráfico, calcule BE.



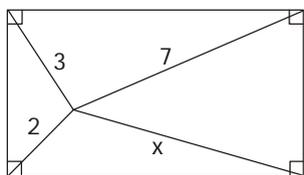
13. En el gráfico, calcule BF, si :
 $AB = 5$ u, $BC = 7$ u, $AF = 4$ u y $FC = 2$ u.



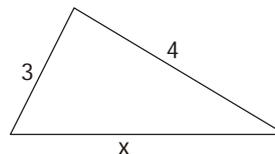
14. Calcule el lado de un rombo, sabiendo que el punto medio de un lado, dista de los extremos del lado opuesto 9 cm y 13 cm.

15. En un triángulo ABC de lados : $AB = 13$ u, $BC = 15$ u y $AC = 14$ u, se traza la bisectriz interior del ángulo C. Calcule AH, siendo \overline{BH} la perpendicular trazada a dicha bisectriz.

16. Calcule "x".



17. ¿Para qué valores enteros de "x", el triángulo mostrado es obtusángulo?



18. Calcule el perímetro de un rombo ABCD, si : $MC = 9$ u, $MD = 13$ u y M es punto medio de \overline{AB} .

19. En un triángulo ABC. $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$.

$$a^2 = b^2 + c^2 + \sqrt{3}bc$$

Calcule la $m \sphericalangle BAC$.

20. Los lados \overline{AB} , \overline{AC} y \overline{BC} miden 13 u, 14 u y 15 u respectivamente. Calcule la distancia del punto medio de \overline{BC} al lado \overline{AC} .

Problemas propuestos

21. En un triángulo de lados 9 u, 10 u y 13 u. Calcule el valor entero de una de las medianas.

- a) 8 u b) 9,0 u c) 12 u
d) 10 u e) 7,0 u

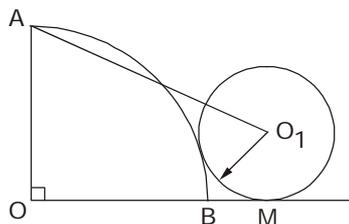
22. Los lados \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} de un triángulo miden 8 u, 10 u y 12 u respectivamente. Por "B" se traza una ceviana \overline{BE} que divide al lado \overline{AC} en dos segmentos, $AE = 9$ u y $EC = 3$ u. Calcule BE.

- a) 4 u b) 5 u c) 6 u
d) 7 u e) 8 u

23. Los lados de un triángulo rectángulo miden $\overline{AB} = 36$ m, $\overline{AC} = 48$ cm y $\overline{BC} = 60$ m, se traza la altura \overline{AH} y la bisectriz \overline{BP} que corta a la altura en "Q". Calcule AQ.

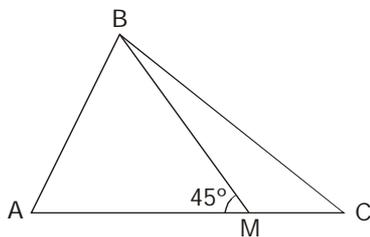
- a) 14 m b) 16 m c) 18 m
d) 20 m e) 22 m

24. En el gráfico : $AO_1 = 7$ u y el radio de la circunferencia pequeña mide 3 u. Calcule el radio del cuadrante AOB.



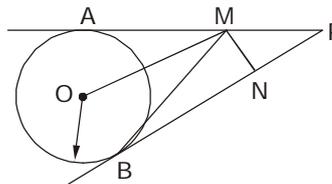
- a) $2\sqrt{3}$ u b) $2\sqrt{5}$ u c) 5 u
d) 6 u e) $3\sqrt{5}$ u

25. Calcule AB, si : $AM = a$ y $MC = b$. ($AB = BC$).



- a) $\sqrt{a^2 - b^2}$ b) $2\sqrt{ab}$
c) $a - b$ d) $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$
e) $\sqrt{a^2 + b^2 - ab}$

26. Calcule BM, si : $\overline{OM} \parallel \overline{BP}$.
 $AM = 4$ u, $MP = 5$ u y $MN = 3$ u.



- a) $\sqrt{29}$ u b) 5,8 u c) $4\sqrt{3}$ u
d) 6 u e) $\sqrt{34}$ u

27. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de las bases de un trapecio, sabiendo que los lados laterales miden 5 cm y 7 cm y las bases se diferencian en 6 cm.

- a) $2\sqrt{5}$ cm b) $2\sqrt{7}$ cm c) $3\sqrt{5}$ cm
d) $3\sqrt{7}$ cm e) $2\sqrt{11}$ cm

28. En un triángulo ABC, se trazan la bisectriz interior BD y la mediana BM, tal que :
 $BD = DM$. Calcule AC, si :
 $AB \cdot BC = 144$ cm².

- a) 18 cm b) 20 cm c) 24 cm
d) 28 cm e) 30 cm

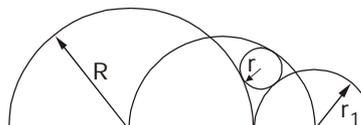
29. Calcule la altura de un trapecio ABCD de bases $BC = 5$ u y $AD = 26$ u y cuyos lados no paralelos miden 13 u y 20 u.

- a) 8 u b) 10 u c) 12 u
d) $6\sqrt{2}$ u e) $6\sqrt{3}$ u

30. Se ubica un punto "P" de la circunferencia inscrita en un cuadrado ABCD de 4 cm de lado.
Calcule : $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$.

- a) 40 cm² b) 36 cm² c) 48 cm²
d) 60 cm² e) 70 cm²

31. En el gráfico, calcule "r", si : $R = 4$ u, $r_1 = 2$ u.



- a) 1 u b) $2/3$ u c) $3/2$ u
d) 2 u e) $1/2$ u

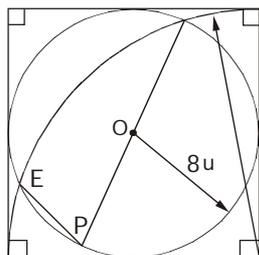
32. En un rectángulo ABCD, se ubica un punto exterior relativo al lado BC, "P", si :
 $PA = 7$ u, $PB = 5$ u, $PD = 6$ u. Calcule PC.

- a) $3\sqrt{2}$ u b) 3 u c) $3\sqrt{3}$ u
d) $2\sqrt{5}$ u e) $2\sqrt{3}$ u

33. En un triángulo ABC, exteriormente relativo a \overline{BC} , se ubica "P", tal que :
 $m\angle APB = 90^\circ$ y $m\angle BAP = m\angle PAC$, si :
 $BC = 5$ u. Calcule : $AB - AC$, siendo :
 $PB^2 + PC^2 = 20$ u²

- a) $\sqrt{7}$ u b) $\sqrt{15}$ u c) $\sqrt{10}$ u
 d) $\sqrt{30}$ u e) $\sqrt{2}$ u

34. En el gráfico, calcule EP.

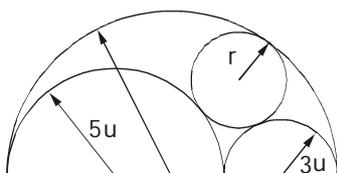


- a) 6 u b) $2\sqrt{2}$ u c) 5 u
 d) $4\sqrt{2}$ u e) 4 u

35. Se tiene el triángulo ABC :
 $m\angle A = 2m\angle B$, $AB = 12$ u y $AC = 8$ u. Calcule BC.

- a) 10 u b) $8\sqrt{2}$ u c) $4\sqrt{15}$ u
 d) 13 u e) $4\sqrt{10}$ u

36. En el gráfico, calcule "r".



- a) 2 u b) $\frac{120}{49}$ u c) $\sqrt{5}$ u
 d) $\frac{33}{15}$ u e) $\sqrt{6}$ u

37. En un triángulo ABC, sobre \overline{BC} se marcan M y N, tal que : $BM = MN = NC$. Si :
 $AB = 7$ u, $AC = 8$ u y $BC = 9$ u.
 Calcule : $AM^2 + AN^2$.

- a) 77 u² b) 66 u² c) 44 u²
 d) 88 u² e) 55 u²

38. Sobre el lado BC de un rombo ABCD se ubica el punto medio M, de tal manera que :
 $(AM)^2 + (MD)^2 = 40$ u².
 Calcule el perímetro de la región rombaleada.

- a) 40 u b) 32 u c) 28 u
 d) 20 u e) 16 u

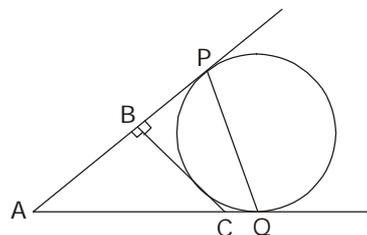
39. En un triángulo ABC, se traza una paralela por B a \overline{AC} . La bisectriz interior del ángulo A corta a dicha paralela en E. Calcule AE, si : $AB = 5$ u, $BC = 4\sqrt{2}$ u y $AC = 7$ u.

- a) $4\sqrt{5}$ u b) $3\sqrt{5}$ u c) $\sqrt{5}$ u
 d) $5\sqrt{5}$ u e) $2\sqrt{5}$ u

40. Si se sabe que las longitudes de los lados de un triángulo ABC, satisfacen la siguiente relación :
 $AC \cdot AB = BC^2 - AC^2$. Calcule la $m\angle BAC$, si la $m\angle ABC = 36^\circ$.

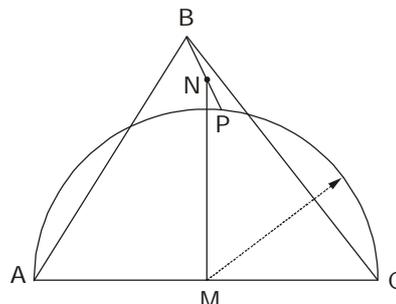
- a) 36° b) 72° c) 58°
 d) 49° e) 38°

41. En el gráfico, $AB = 12$ dm y $BC = 5$ dm. Calcule PQ.



- a) $\frac{5}{3}\sqrt{13}$ dm b) $\frac{2}{3}\sqrt{29}$ dm c) $\frac{15}{16}\sqrt{26}$ dm
 d) $\frac{15}{13}\sqrt{26}$ dm e) $\frac{20}{13}\sqrt{11}$ dm

42. En el gráfico, se tiene el triángulo equilátero ABC, $AB = 12$ u y $BP = 5$ u. Calcule MN, siendo N punto medio de \overline{BP} .



- a) $\sqrt{87}$ u b) $\frac{\sqrt{263}}{2}$ u c) $2\sqrt{38}$ u
 d) 20 u e) $2\sqrt{10}$ u

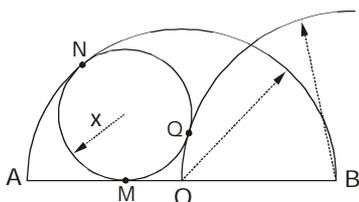
43. En un triángulo ABC, obtuso en "C" :
 $AB = c$, $BC = a$ y $AC = b$.
 Calcule la $m \angle ACB$, sabiendo que :

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2c^2(a^2 + b^2)$$

- a) 120° b) 150° c) 115°
 d) 105° e) 135°
44. En un triángulo, dos lados miden $\sqrt{7}$ dm y $\sqrt{3}$ dm, las medianas relativas a dichos lados son perpendiculares entre sí. Calcule la distancia del baricentro al vértice común de dichos lados.

- a) $\sqrt{2}$ dm b) 2 dm c) $\sqrt{5}$ dm
 d) $\frac{4}{3}\sqrt{2}$ dm e) $\sqrt{6}$ dm

45. En el gráfico, $AB = 8$ dm, calcule "x".
 (M, N y Q son puntos de tangencia).

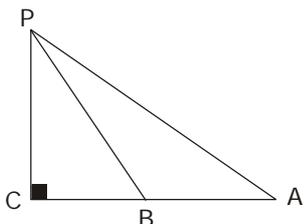


- a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ dm b) $\sqrt{2}$ dm c) $\sqrt{3}$ dm
 d) $\frac{4}{3}\sqrt{3}$ dm e) 2 dm

46. Sea ABCD un romboide donde :
 $BC = 3(AB)$ y M es punto medio de \overline{BC} .
 Calcule CD, si: $AM = 9$ dm y $DM = 6$ dm.

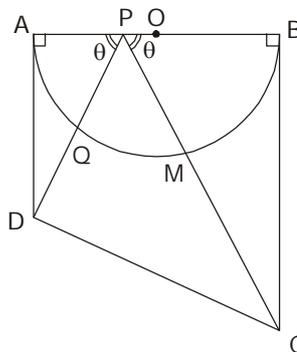
- a) $2\sqrt{3}$ dm b) $3\sqrt{2}$ dm c) $4\sqrt{2}$ dm
 d) $4\sqrt{3}$ dm e) $6\sqrt{2}$ dm

47. Calcule la longitud de la hipotenusa \overline{AP} , sabiendo que :
 $PB = 11$ u, $CB = 7$ u, $BA = 8$ u.



- a) 16 u b) 17,8 u c) $\sqrt{297}$ u
 d) $\sqrt{295}$ u e) 19,5 u

48. En el gráfico, calcule la longitud del segmento \overline{CD} , si :
 \overline{AB} es el diámetro de la semicircunferencia.
 $AP = 3$ u, $PB = 8$ u, $PQ = 4$ u y $PM = 6$ u.



- a) $\sqrt{876}$ u b) $\frac{1}{2}\sqrt{1009}$ u c) $\sqrt{935}$ u
 d) $\frac{1}{2}\sqrt{1022}$ u e) $\sqrt{984}$ u

49. Sea ABCD un cuadrilátero donde \hat{C} es recto, $AB = 13$ cm, $BC = 20$ cm, $CD = 10$ cm, $AD = 17$ cm.
 Calcule la longitud de la proyección de \overline{AD} sobre la recta que contiene al segmento \overline{AB} .

- a) $\frac{20}{17}$ cm b) $\frac{10}{13}$ cm c) $\frac{15}{17}$ cm
 d) $\frac{21}{13}$ cm e) $\frac{20}{13}$ cm

50. En un triángulo ABC, los lados están representados por tres números enteros consecutivos y el ángulo mayor es doble del menor.
 Calcule los lados del triángulo.

- a) 2u, 3u y 4u b) 7u, 8u y 9u
 c) 6u, 7u y 8u d) 5u, 6u y 7u
 e) 4u, 5u y 6u

51. En el triángulo rectángulo ABC, recto en A, los puntos P_1 , P_2 , P_3 y P_4 , dividen a la hipotenusa en cinco partes iguales.
 $AP_1^2 = 265$ u² y $AP_4^2 = 160$ u². ¿Cuánto mide la hipotenusa?

- a) 12 u b) 15 u c) 18 u
 d) 21 u e) 25 u

52. Sea un triángulo ABC de lados $AB = AC$ y $BC = \sqrt{2}$ u. Si la bisectriz del ángulo B corta al lado opuesto en D y $BD = 1$ u; entonces, los ángulos A y B miden :

- a) 60° , 60° b) 90° , 45°
 c) 100° , 40° d) 120° , 30°
 e) 150° , 15°

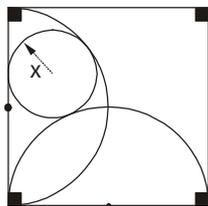
53. En un triángulo ABC, se cumple que :
 $m \angle BAC = 2m \angle BCA$; $AB = 6$ u y $AC = 8$ u.
 Calcule BC.

- a) $3\sqrt{21}$ u b) $\sqrt{21}$ u c) $2\sqrt{21}$ u
 d) $2\sqrt{14}$ u e) $3\sqrt{14}$ u

54. En un trapecio, las bases miden 6 u y 16 u, los otros dos lados miden 7 u y 9 u. Calcule la longitud del segmento que une los puntos medios de las bases.

- a) 6 u b) $2\sqrt{10}$ u c) 7 u
 d) $3\sqrt{5}$ u e) $\frac{11}{2}$ u

55. Calcule "x", si la longitud del lado del cuadrado es 18 m.



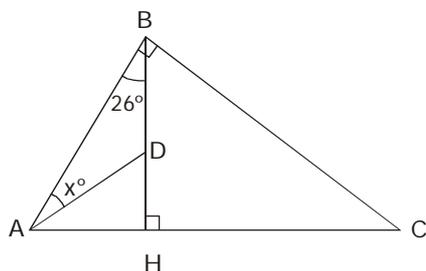
- a) 1 m b) 2 m c) 3 m
 d) 4 m e) 6 m

56. Calcule la longitud del circunradio de un triángulo cuyos lados miden 26 dm, 28 dm y 30 dm.

- a) 16,125 dm b) 16,25 dm
 c) 16,89 dm d) 18 dm
 e) 20 dm

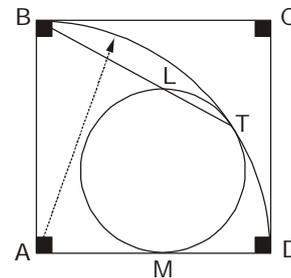
57. En el gráfico, calcule "x°", si :

$$(AB)^2 = (AD)(BC)$$



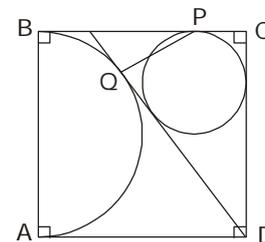
- a) 34° b) 17° c) 23°
 d) 26° e) 38°

58. En el gráfico, calcule el lado del cuadrado ABCD. Si :
 $AM = a$ y $BL = b$.
 (M y T son puntos de tangencia).



- a) $\frac{a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}$ b) $\frac{a^2}{\sqrt{2a^2 - b^2}}$
 c) $\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ d) $\frac{a^2 b}{(a + b)(a - b)}$
 e) $\frac{ab}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

60. Si ABCD es un cuadrado de lado que mide 40u.
 Calcule PQ.
 (P y Q : puntos de tangencia).



- a) $2\sqrt{61}u$ b) $2\sqrt{63}u$ c) $2\sqrt{65}u$
 d) $2\sqrt{69}u$ e) $2\sqrt{77}u$

Claves

21.	<i>d</i>
22.	<i>c</i>
23.	<i>c</i>
24.	<i>b</i>
25.	<i>d</i>
26.	<i>e</i>
27.	<i>b</i>
28.	<i>c</i>
29.	<i>c</i>
30.	<i>e</i>
31.	<i>b</i>
32.	<i>e</i>
33.	<i>b</i>
34.	<i>d</i>
35.	<i>e</i>
36.	<i>b</i>
37.	<i>a</i>
38.	<i>e</i>
39.	<i>a</i>
40.	<i>b</i>

41.	<i>d</i>
42.	<i>b</i>
43.	<i>e</i>
44.	<i>a</i>
45.	<i>c</i>
46.	<i>b</i>
47.	<i>c</i>
48.	<i>b</i>
49.	<i>d</i>
50.	<i>e</i>
51.	<i>e</i>
52.	<i>d</i>
53.	<i>c</i>
54.	<i>b</i>
55.	<i>d</i>
56.	<i>b</i>
57.	<i>e</i>
58.	<i>e</i>
59.	<i>c</i>
60.	<i>c</i>