Capítulo 19

PIRÁMIDE - CONO - TRONCOS

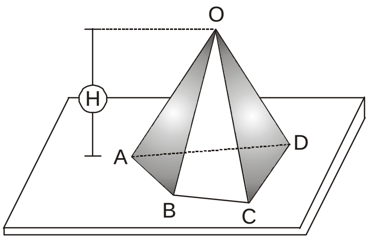
PIRÁMIDE

Elementos :

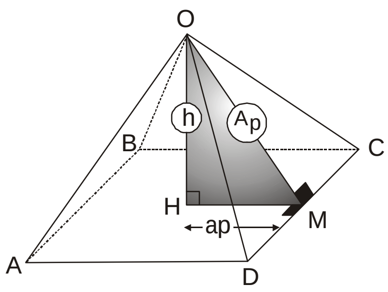
* Vértice : O
* Base : ABCD
* Altura : H
* Arista laterales : $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, ...

Notación :

Pirámide : O - ABCD



Pirámide Regular:



* Apotema de la pirámide : A_P
* Apotema de la base : ap
* Semiperímetro de la base : P_{BASE}

* ***Área Lateral*** : (A_L)

$$A_L = P_{BASE} \cdot A_P$$

* ***Área Total*** : (A_T)

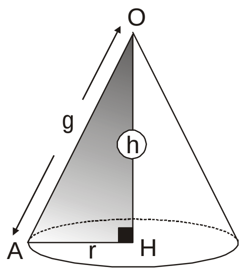
$$A_T = P_{BASE} (A_P + a_P)$$

* ***Volumen :*** (V)

$$V = \frac{1}{3} \cdot S_{BASE} \cdot h$$

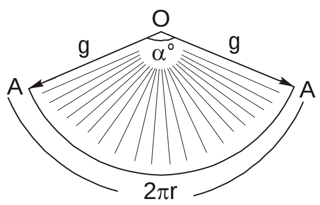
en cualquier pirámide

CONO DE REVOLUCIÓN



* Generatriz : g
* Radio de la base : r

* ***Desarrollo del Área Lateral*** (A_L)



* ***Área Lateral*** (A_L)

$$A_L = \pi rg$$

* ***Área Total*** (A_T)

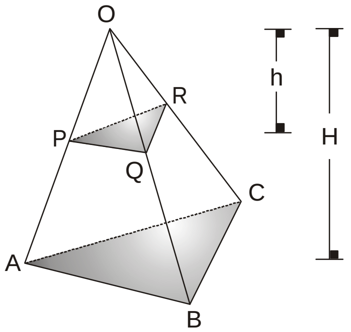
$$A_T = \pi r (g+r)$$

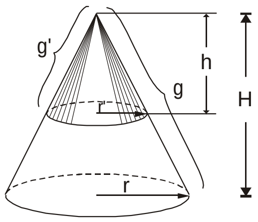
* ***Volumen (V)***

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$$

TRONCO DE PIRÁMIDE Y CONO

Sección paralela a la base de una pirámide y de un cono recto :





Propiedades :

1. $$\frac{A_L O-PQR}{A_L O-ABC}=\frac{A_T O-PQR}{A_T O-ABC}=\frac{h^2}{H^2}=\frac{OP^2}{OA^2}=\frac{PQ^2}{AB^2}$$

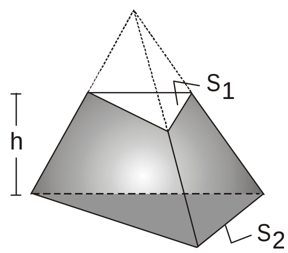
$$\frac{A'_L}{A_L}=\frac{A_T'}{A_T}=\frac{g'^2}{g^2}=\frac{r'^2}{r^2}=\frac{h^2}{H^2}$$

2. $$\frac{V_O-PQR}{V_O-ABC}=\frac{h^3}{H^3}=\frac{OQ^3}{OB^3}=\frac{QR^3}{BC^3}$$

$$\frac{V'}{V}=\frac{g'^3}{g^3}=\frac{r'^3}{r^3}=\frac{h^3}{H^3}$$

* V' = volumen del cono sombreado.
* V = volumen del cono mayor.

TRONCO DE PIRÁMIDE

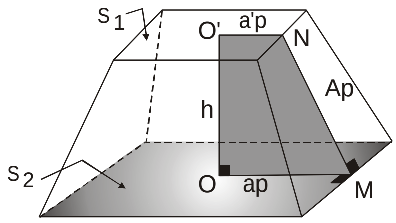


* ***Volumen (V)***

$$V=\frac{h}{3}(S_1+\sqrt{S_1.S_2}+S_2)$$

TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

* Apotemas de las bases: a' p, y ap.
* Apotema del tronco: Ap
* Semiperímetro de las bases: p' y p.



* ***Área Lateral (A_L)***

$$A_L=(p'+p).Ap$$

* ***Área Total (A_T)***

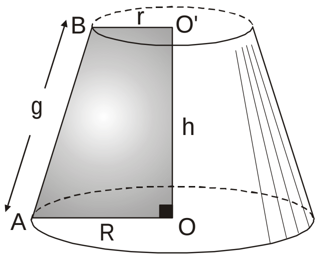
$$A_T=A_L+S_1+S_2$$

* ***Volumen (V)***

$$V=\frac{h}{3}(S_1+\sqrt{S_1.S_2}+S_2)$$

TRONCO DE CONO O DE REVOLUCIÓN

* Radios de las bases: R y r
* Generatriz del tronco: g



* ***Área Lateral (A_L)***

$$A_L=(\pi r+\pi R)g=\pi g(r+R)$$

* ***Área Total (A_T)***

$$A_T=A_L+\pi r^2+\pi R^2$$

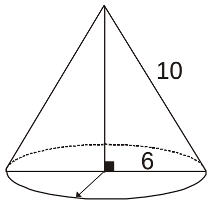
* ***Volumen (V)***

$$V=\frac{h}{3}(\pi r^2+\sqrt{\pi r^2\pi R^2}+\pi R^2)$$

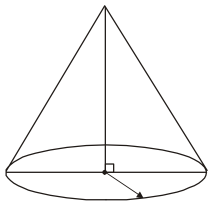
$$V=\frac{\pi h}{3}(r^2+Rr+R^2)$$

Test de aprendizaje preliminar

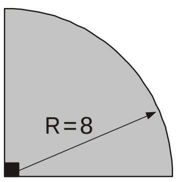
01. En el cono recto, hallar:
   * Área lateral
   * Área total
   * Volumen



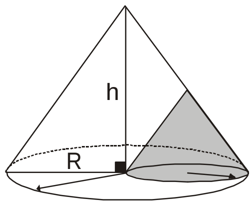
02. Hallar el volumen de un cono de revolución de área lateral igual a "m". La distancia del centro de la base a una de sus generatrices es 2n.



03. Calcular el volumen de un cono de revolución en el cual el desarrollo de su superficie lateral se muestra.



04. Calcular la medida del ángulo del desarrollo que se obtiene, al desarrollar la superficie lateral del cono menor, si tiene una generatriz paralela a la generatriz mayor, $h=\sqrt{15}$; R = 1.

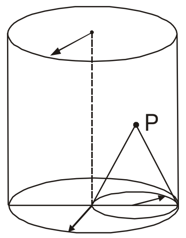


05. Calcular la longitud de la altura de una pirámide cuadrangular regular, si el lado de la base mide "a" y el área de dicha base es los $\frac{4}{9}$ del área total.

06. Se tiene una pirámide V-ABCD tal que ABCD es un paralelogramo cuyas diagonales miden AC=10 y BD=8. Hallar el valor de:

$$E=(VA)^2+(VC)^2-(VB)^2-(VD)^2$$

07. En la figura, calcular la distancia "P" a la base superior, si el cilindro recto mostrado es equivalente a 18 conos de revolución como el que se indica en su parte interior, la altura de dicho cono mide 8 cm.



08. Calcular el volumen de una pirámide cuyas caras laterales son triángulos equiláteros y cuya base es un cuadrado de lado "a".

09. Se tiene un cono recto de altura 40 y radio 30, se inscribe una esfera en el cono, cuya línea de tangencia lo ha dividido en dos sólidos. Calcular el volumen del cono superior.

10. En una pirámide hexagonal regular, su altura mide 18 y la arista de la base mide 12. Calcular a qué distancia del vértice se debe trazar un plano paralelo a la base para que la sección resultante tenga un área de $72\sqrt{3}$.

Practiquemos :

11. Una pirámide cuadrangular regular tiene como arista básica 5dm y es cortado mediante un plano paralelo a la base a 6dm de su vértice. Si la sección que se determina es de $4dm^2$ de área, hallar el volumen del tronco de pirámide que se determina.

12. La altura de un cono recto se divide en tres segmentos congruentes por dos puntos, por dichos puntos se trazan planos paralelos a las bases. Calcular el volumen de la parte mayor, si el volumen del cono es de $27m^3$.

13. En una pirámide cuya base es un triángulo equilátero, su altura es igual al radio del círculo circunscrito a la base. A una distancia igual a la medida del inradio de la base, se traza un plano paralelo a ésta que determina un tronco de pirámide cuyo volumen se pide calcular en función del circunradio R de la base.

14. ¿A qué distancia del vértice de una pirámide cuya altura mide 8 cm, se debe trazar un plano paralelo a la base para que se determine dos sólidos equivalentes?

15. El área lateral de un cono de revolución mide "M" y la distancia del centro de la base a una de sus generatrices mide "N". Entonces el volumen de dicho, cono es:

16. Dado una pirámide regular hexagonal, la arista de la base es "b". Si la arista lateral mide "3b", hallar la distancia del pie de la altura a una arista lateral.

17. En una pirámide cuadrangular regular, la arista lateral forma 37° con el plano base. Calcular el valor del ángulo diedro que forma la cara lateral con la base.

18. Calcular el área lateral de un cono de revolución de altura "h", si la porción de perpendicular trazada a una generatriz por un punto de la circunferencia base e interceptada por la prolongación de la altura mide "a".

19. La generatriz de un cono mide 12dm y la superficie lateral desarrollada forma un semicírculo. Calcular el volumen de dicho cono.

20. Los volúmenes que genera un triángulo rectángulo cuando gira alrededor de sus catetos son de $3dm^3$ y $4dm^3$. Calcular el volumen que genera el triángulo cuando gira alrededor de la hipotenusa.

Problemas propuestos

21. Determinar el volumen de un tronco de cono de revolución, cuyas bases tienen como áreas $16\pi dm^2$ y $81dm^2$. Además, el área total del tronco es de $266\pi dm^2$.

a) $352\pi dm^3$ b) 432π c) 502π
d) 532π e) 842π

22. Calcular el volumen de un tronco de cilindro recto, conociendo que la sección recta es un círculo y forma con una base mayor un diedro de 45°; además el área de la base mayor es 60u y las generatrices máxima y mínima son 10 y 4u, respectivamente.

a) $210\sqrt{2}u^3$ b) $180\sqrt{2}$ c) $220\sqrt{2}$
d) $240\sqrt{2}$ e) $190\sqrt{2}$

23. En un tronco de pirámide cuadrangular las bases distan $2\sqrt{3}u$, la arista básica menor mide 2u y las caras laterales están inclinadas con respecto a la base un ángulo diedro cuya medida es 60°. Calcular el área de la superficie total.

a) $116\ u^2$ b) 96 c) 104
d) 102 e) 100

24. El volumen de un tronco de cono de revolución es $336\pi\ cm^3$ la altura mide 4cm y el radio de la base mayor es el doble del radio de la base menor. Hallar el radio de la base mayor.

a) 12 cm b) 6 c) 8
d) 5 e) $4\sqrt{2}$

25. Una cuerda del círculo base de un cono circular recto de 8m de altura, mide 16m. La distancia de la cuerda al centro del círculo de la base es de 4m. Calcular el área lateral del cono.

a) $12\pi\ m^2$ b) $48\sqrt{5}\pi$ c) 96π
d) $96\sqrt{5}\pi$ e) 48π

26. Sea F-ABCD una pirámide donde las aristas laterales son congruentes y miden $5\sqrt{2}$ dm . $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ miden 8dm y 6dm en ese orden. Calcular el volumen del sólido, sabiendo además que la base es un rectángulo.

a) 80/3 dm^3 b) 40 c) 80
d) 90 e) 50/3

27. En un cono recto de revolución, el punto medio de una generatriz dista de la base 6dm. Si el radio es de 4dm, calcular la capacidad de dicho cono.

a) $32\pi\,dm^3$ b) 64π c) 46π
d) 54π e) 60π

28. Se inscribe una esfera en un cono cuya base tiene una longitud de 10πdm y una altura de 12dm. Calcular el área de la sección que determina los puntos de tangencia de la esfera y la superficie lateral del cono.

a) $\frac{1600\pi}{169}dm^2$ b) $\frac{160\pi}{19}$ c) $\frac{1060\pi}{19}$

d) $\frac{1200\pi}{149}$ e) $\frac{1600\pi}{20}$

29. En una pirámide S-ABC, la base ABC y la cara SBC son triángulos equiláteros. Si : AS = 4 y BC = 6, calcular el volumen de la pirámide S-ABC.

a) $4\sqrt{23}$ b) $2\sqrt{26}$ c) $3\sqrt{23}$
d) $\sqrt{26}$ e) $5\sqrt{26}$

30. Calcular el volumen de una pirámide cuya base es un trapecio rectángulo de diagonales perpendiculares y base mayor igual a 16m. Además, se sabe que el pie de la altura de la pirámide coincide con el punto de intersección de las diagonales de la base y que los ángulos diedros cuyas aristas son las bases mayor y menor del trapecio rectángulo; miden 45° y 53°, respectivamente.

a) 482 m^3 b) 506 c) 512
d) 525 e) 600

31. Se da una pirámide regular de base cuadrada S-ABCD con el vértice S, por los puntos A y B y el punto medio de la arista $\overline{SC}$ se ha trazado un plano. ¿En qué relación el plano divide al volumen de la pirámide?

a) 1/2 b) 2/3 c) 3/2
d) 3/4 e) 3/5

32. Se construye un cono circular recto de 10dm de altura y se le inscribe una esfera de 8dm de diámetro, ¿cuál es el volumen del cono?

a) $\frac{400\pi}{3}dm^3$ b) $\frac{800\pi}{3}$ c) $\frac{500\pi}{3}$

d) $\frac{700\pi}{3}$ e) $\frac{100\pi}{3}$

33. En un cono de revolución, se inscribe dos esferas de radios 2dm y 6dm. Calcular el volumen del cono.

a) $190\pi dm^3$ b) 810π c) 790π
d) 840π e) 648π

34. En un cono recto de revolución de vértice "O" y diámetro $\overline{AB}$, en la base, se trazan $\overline{AP}$ y $\overline{BQ}$ cuerdas secantes, que forman un ángulo de 45. Hallar $m\measuredangle POQ$, si la altura del cono es igual al radio de la base.

a) 45 b) 90 c) 60
d) 120 e) 75

35. Hallar el volumen de un cono recto de altura 3m, sabiendo que el plano que pasa por el vértice determina en la base una cuerda que subtiende un arco de 120° y que la sección determinada por dicho plano es un triángulo rectángulo.

a) 9 π b) 12 π c) 18 π
d) 24 π e) 36 π

36. Se tiene una pirámide cuadrangular regular en la cual una arista lateral y la altura forman un ángulo cuya medida es 30°. Calcular la medida del ángulo diedro que forma el plano de la base y un plano perpendicular a una arista lateral.

a) 45° b) 53° c) ArcCtg$\sqrt{2}$
d) ArcTg$\sqrt{5}$ e) 30°

37. Por el incentro del triángulo ABC cuyos lados miden 5m, 6m y 7m, se traza la perpendicular al plano de dicho triángulo. Si : IO = $2\sqrt{2}$, hallar la suma de las áreas de las caras laterales de la pirámide O-ABC.

a) 144 b) $14\sqrt{6}$ c) $12\sqrt{6}$
d) $6\sqrt{6}$ e) $18\sqrt{6}$

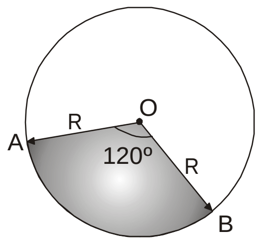
38. La base de una pirámide es un triángulo equilátero y las caras laterales son triángulos isósceles rectángulos. Si las aristas laterales miden 4 dm, calcular el área total de la pirámide.

a) $4(6+2\sqrt{3})m^2$ b) $2(2+3\sqrt{3})$
c) $4(3+3\sqrt{3})$ d) $3(4+2\sqrt{3})$
e) $5(6+2\sqrt{3})$

39. Hallar el volumen de una pirámide irregular O-ABCD, sabiendo que su base ABCD es un cuadrado de lado "a", su cara lateral AOB es un triángulo rectángulo (recto en "O") y su cara lateral COD es un triángulo equilátero.

a) $a^3\sqrt{3}/12$ b) $a^3\sqrt{3}/4$
c) $2a^3\sqrt{3}/3$ d) $a^3\sqrt{2}/12$
e) $a^3\sqrt{2}/4$

40. De una lámina de lata circular de radio "R", se extrae un sector circular de 120º, como se muestra en la figura, uniendo los extremos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ se construya un embudo. Calcular la capacidad de dicho embudo.



a) $\frac{2}{81}\pi\sqrt{2}R^3$ b) $\frac{4}{9}\pi\sqrt{3}R^3$
c) $\frac{2}{27}\pi\sqrt{2}R^3$ d) $\frac{2}{87}\pi\sqrt{2}R^3$
e) $\frac{5}{27}\pi\sqrt{3}R^3$

41. Se tienen dos conos rectos congruentes tangentes por sus generatrices y cuyos vértices coinciden, si sus alturas son "h" y el radio de bases es "r"; entonces el área de la región triangular cuyos vértices son los centros de las bases y el vértice común de los conos es:

a) 2hr b) $r\sqrt{hr}$
c) $h\sqrt{r^2+h^2}$ d) $\frac{rh^3}{r^2+h^2}$
e) $\frac{hr^3}{h^2-r^2}$

42. La altura y el diámetro de la base de un cono recto miden 18 y 24 unidades respectivamente. En el cono, se inscribe un cilindro recto cuya área total es $260\pi u^2$. Calcular el volumen del cono parcial cuya base es la base superior del cilindro.

a) $500\pi u^3$ b) 480π c) 440π
d) 420π e) 400π

43. En un tronco de pirámide regular cuadrangular, el plano que pasa por un lado de la base mayor y el lado opuesto de la base menor forma con la base mayor un ángulo de 60°. Calcular el volumen de dicho sólido si los lados de las bases miden $\sqrt{3}$ y $3\sqrt{3}$.

a) $26\sqrt{3}$ b) $30\sqrt{3}$ c) 60
d) 70 e) 39

44. Las bases de un tronco de pirámide regular hexagonal tienen $4u^2$ y $9u^2$ de áreas respectivamente; y su altura es igual a la arista de un hexaedro regular equivalente. Calcular el volumen de dicho tronco.

a) $\frac{\sqrt{19}}{3}u^3$ b) $3\sqrt{19}$ c) $3\sqrt{\frac{19}{3}}$
d) $\frac{19}{3}\sqrt{\frac{19}{3}}$ e) $\frac{19}{3}$

45. Calcular el volumen de una pirámide de base triangular en la que dos de sus caras son triángulos equiláteros cuyo lado mide L y las otras dos son triángulos rectángulos isósceles.

a) $\frac{L^3\sqrt{2}}{12}$ b) $\frac{L^3\sqrt{2}}{10}$ c) $\frac{L^3\sqrt{2}}{8}$
d) $\frac{L^3\sqrt{5}}{12}$ e) $\frac{L^3\sqrt{5}}{8}$

46. Un tronco de pirámide equivalente a un hexaedro regular tiene como altura a la arista del hexaedro regular. Hallar el área total del hexaedro conociendo que el tronco de pirámide tiene por bases $1m^2$ y $4m^2$.

a) $13\ m^2$ b) 9 c) 14
d) 15 e) 16

47. Hallar el volumen de un tronco de cono de revolución, cuyo desarrollo del área lateral es un trapecio circular de área 30π, si la altura y la generatriz del tronco miden 3 y 5u respectivamente.

a) 30π b) 31π c) 32π
d) 33π e) 36π

48. Dos bases de un tronco de cono circular son dos círculos de radios que miden 3 y 6m. Si la generatriz mide 6m, hallar la longitud del radio de la esfera circunscrita.

a) 3 m b) 4 c) 5
d) 6 e) 8

49. Calcular el volumen de un tronco de cono de revolución, donde los radios de las bases miden a y 3a. Además, el área lateral es igual a la suma de las áreas de sus bases.

a) $5,5\pi a^3$ b) $3,5\pi a^3$ c) $4,5\pi a^3$
d) $6,5\pi a^3$ e) $7\pi a^3$

50. Calcular el volumen de un tronco de pirámide circunscrito a una esfera, cuyas bases son regiones cuadradas y una cara lateral es perpendicular a las bases. Además, la suma y el producto de las longitudes de dos aristas básicas diferentes es igual a "S" y a "P" respectivamente.

a) $\frac{P}{2}(S^2+P)$ b) $\frac{2P}{3S}(S^2-P)$

c) $\frac{S}{3}(P^2+S)$ d) $\frac{P}{S}(S^2-12P)$

e) $\frac{S}{P}(P^2-2S)$

51. En un tronco de pirámide triangular regular, la arista lateral se encuentra inclinada 45° respecto de la base mayor. Calcular la relación entre el apotema del tronco y su altura.

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{4}$

d) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ e) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

52. En un tronco de pirámide cuadrangular regular, las aristas básicas miden 4m y 2dm. Si la altura del sólido mide h dm, calcular la capacidad del sólido.

a) $\frac{27}{4}h\,dm^3$ b) $\frac{28}{5}h$ c) $\frac{28}{3}h$

d) $\frac{82}{3}h$ e) $\frac{14}{3}h$

53. Calcular el volumen de un tronco de cono recto, cuyos radios de las bases miden 3 dm y 9 dm. Además, el área lateral del sólido es de $120\pi\,dm^2$.

a) $324\pi\,dm^3$ b) 312π c) 336π

d) 360π e) 348π

54. El lado de la base mayor de un tronco de pirámide regular cuadrangular mide $6\sqrt{2}$ m y su altura 3m; las aristas laterales forman ángulos de 45° con el plano de la base mayor. Calcular su volumen.

a) 216 m^3 b) 621 c) 162

d) 136 e) 126

55. En un tronco de cono circular de bases paralelas, los radios de sus bases miden 5dm y 2dm. Si el área lateral es de $35\pi\,dm^2$, calcular el ángulo central del desarrollo lateral.

a) $\frac{5\pi}{7}$ rad b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{2\pi}{3}$

d) $\frac{\pi}{2}$ e) $\frac{6\pi}{5}$

56. Calcular la altura de un tronco de pirámide regular cuadrangular ABCD-EFGH, si el área de la sección plana BFHD es B_1 y el área de la sección determinada en el sólido por un plano equidistante a sus bases es B_2.

a) $\sqrt{\frac{B_1^2}{2B_2}}$ b) $\frac{B_1^2}{B_2}$ c) $\frac{B_2^2}{B_1}$

d) $\frac{B_1B_2}{B_1+B_2}$ e) $\sqrt{B_1+B_2}$

57. Las áreas de las bases elípticas de un tronco de cono oblicuo son de $32\pi\,dm^2$ y $72\pi\,dm^2$. Determinar el valor de la altura de dicho tronco, sabiendo que su volumen es de $304\pi\,dm^3$.

a) 12 dm b) 9 c) $6\sqrt{2}$

d) 6 e) $3\sqrt{6}$

58. En una pirámide triangular regular O-ABC trirectángulo en "O", el volumen es $\frac{\sqrt{3}}{2}u^3$, calcular la distancia del centro de la base a la arista lateral?

a) $\frac{\sqrt{2}}{3}$u b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{2}$

59. Calcular el volumen de un tronco de cilindro circular recto, en el cual se inscribe una esfera, además la generatriz mayor y menor miden 4u y 1u.

a) $1{,}4\pi\,u^3$ b) $1{,}6\pi$ c) $1{,}8\pi$

d) $2{,}2\pi$ e) $2{,}4\pi$

60. Las bases de un tronco de cono circular son los círculos de radios 3u y 6u. Si la generatriz mide 6u, ¿cuál es la longitud del radio de la esfera circunscrita?

a) 6 u b) 5 c) 8

d) 9 e) 10

Claves

21.	d	41.	d
22.	a	42.	a
23.	c	43.	e
24.	b	44.	d
25.	b	45.	a
26.	c	46.	c
27.	b	47.	b
28.	a	48.	d
29.	a	49.	d
30.	c	50.	b
31.	e	51.	d
32.	b	52.	c
33.	e	53.	b
34.	c	54.	e
35.	c	55.	e
36.	e	56.	a
37.	c	57.	d
38.	a	58.	d
39.	a	59.	b
40.	a	60.	a