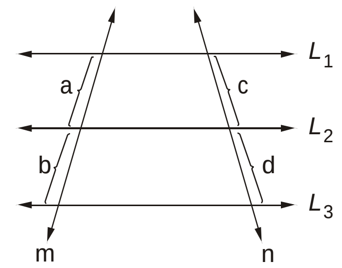
Capítulo 9

PROPORCIONALIDAD Y SEMEJANZA

TEOREMA DE THALES

Si tres o más rectas paralelas, son intersecadas por dos rectas secantes a las paralelas; entonces, se determinan entre las rectas paralelas, segmentos proporcionales.

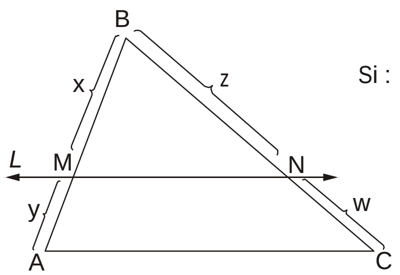


Si : * $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2} \parallel \overleftrightarrow{L_3}$

* $\overleftrightarrow{m}$ y $\overleftrightarrow{n}$ secantes

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}}$

Propiedad :



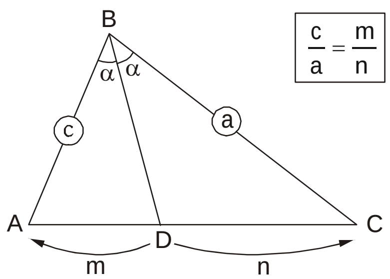
Si : $L \parallel \overline{AC}$ $\Rightarrow \boxed{\dfrac{x}{y} = \dfrac{z}{w}}$

Teorema de Thales en un triángulo.

Propiedad de la Bisectriz

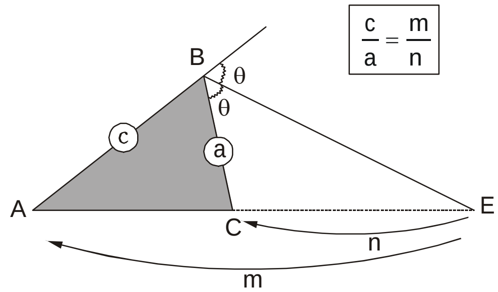
En un triángulo, los lados que forman el vértice de donde se traza la bisectriz son proporcionales a los segmentos determinados por dicha bisectriz en el lado opuesto o su prolongación.

**** Bisectriz Interior***



$\boxed{\dfrac{c}{a} = \dfrac{m}{n}}$

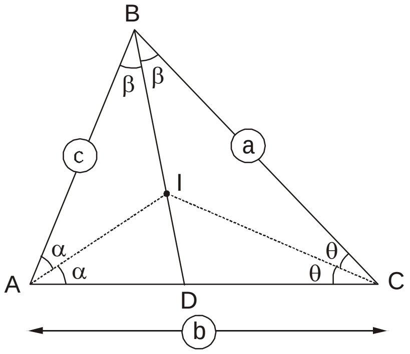
**** Bisectriz Exterior***



$\boxed{\dfrac{c}{a} = \dfrac{m}{n}}$

TEOREMA DEL INCENTRO

El incentro determina en cada bisectriz dos segmentos que son proporcionales a la suma de los lados que forman el vértice de donde parte la bisectriz y al tecer lado.

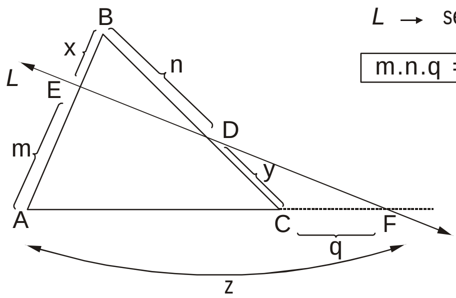


"I" $\longrightarrow$ incentro

$$\boxed{\frac{BI}{ID} = \frac{c+a}{b}}$$

TEOREMA DE MENELAO

Si se traza una recta transversal a los lados de un triángulo, se determinan sobre dichos lados 6 segmentos, donde el producto de 3 de ellos no consecutivos es igual al producto de los otros 3 restantes.

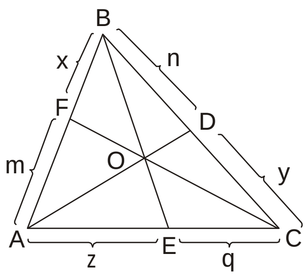


$L \longrightarrow$ secante

$$\boxed{m.n.q = x.y.z}$$

TEOREMA DE CEVA

Si en un triángulo se trazan 3 cevianas interiores concurrentes, se determinan sobre los lados 6 segmentos, donde el producto de 3 de ellos no consecutivos es igual al producto de los otros 3 restantes.



* $\overline{AD}$, $\overline{BE}$ y $\overline{CF}$ cevianas
* "O" cevacentro

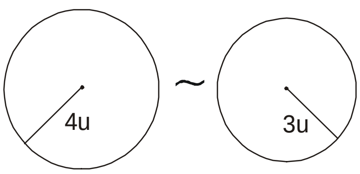
$$\boxed{m.n.q = x.y.z}$$

SEMEJANZA

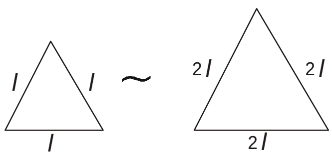
Defínción : Dos figuras son semejantes se tienen la misma forma, y tamaños distintos.

Ejm. :

*



*

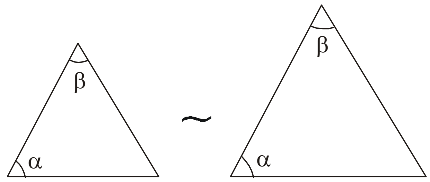


SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

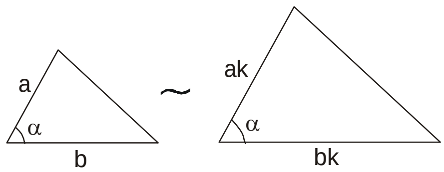
Dos triángulos son semejantes si tienen sus ángulos respectivamente congruentes y sus lados homólogos respectivamente proporcionales.

Lados Homólogos : Se denomina así a aquellos lados que se oponen a ángulos congruentes en triángulos semejantes

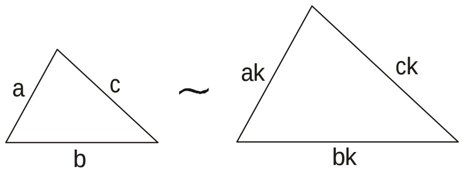
Primer Caso : Dos triángulos serán semejantes si tienen 2 ángulos internos respectivamente de igual medida.



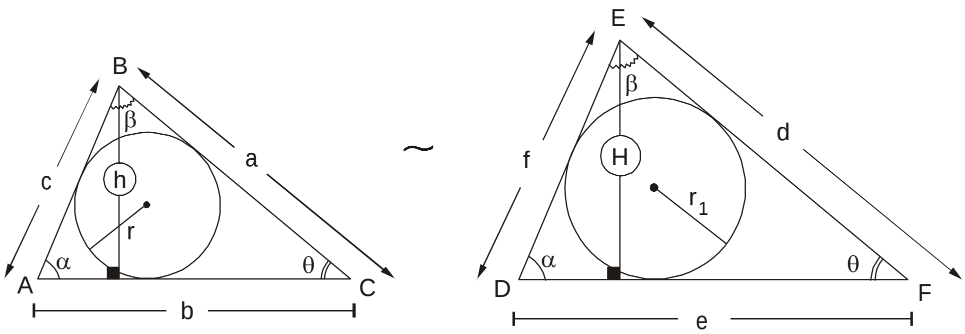
Segundo Caso : Dos triángulos serán semejantes si tienen dos lados respectivamente proporcionales y el ángulo comprendido entre dichos lados congruentes.



Tercer Caso : Dos triángulos serán semejantes, si sus tres lados son respectivamente proporcionales.



Observaciones : En dos triángulos semejantes, sus lados homólogos, así como sus elementos homólogos : (alturas, bisectrices, medianas, inradios, circunradios, etc.), son respectivamente proporcionales.

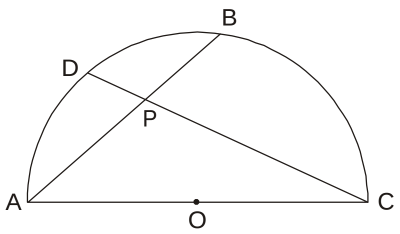


Se cumple :

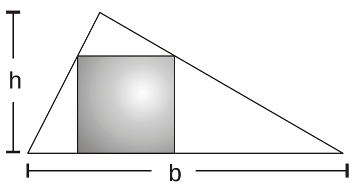
$$\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}=\frac{r}{r_1}=\frac{h}{H}=......=k$$

Test de aprendizaje preliminar

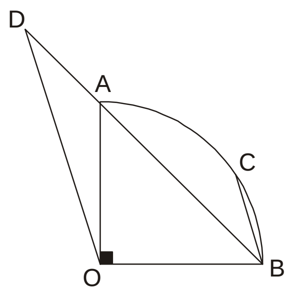
01. "O" es centro de la semicircunferencia.
CP = 8 u; DP = 2 u; AB = 8u. Calcule PB.



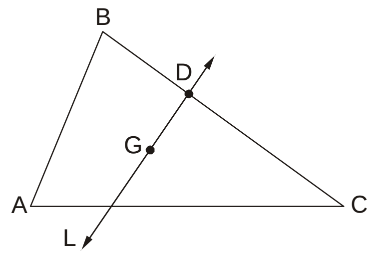
02. Calcule el lado del cuadrado, mostrado en la figura, en función de la base "b" del triángulo sobre el cual descansa y de la altura "h" relativa a dicha base.



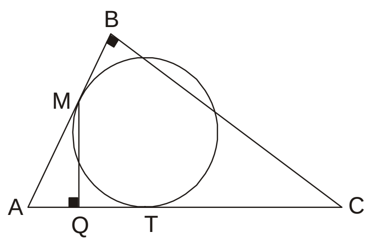
03. Según el gráfico : $\overline{BC} // \overline{OD}$ y OD = 2AB.
Calcule BC. Si : AD = 4u.



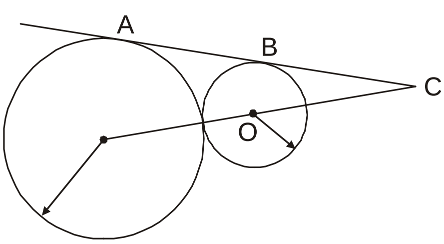
04. En el gráfico, BC = 15 u. Calcule DC, si : G es baricentro del triángulo ABC y L es paralela a $\overline{AB}$.



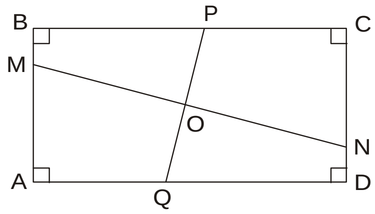
05. Del gráfico, calcule MQ, si :
BC = 25 u y TC = 4AT.
M y T : puntos de tangencia.



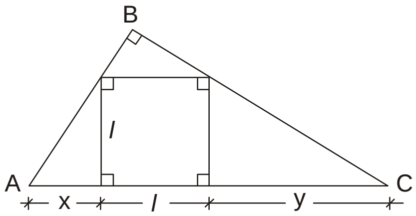
06. En el gráfico, calcule el radio de la cicunferencia mayor donde : OC = 5 m, BC = 4 m.



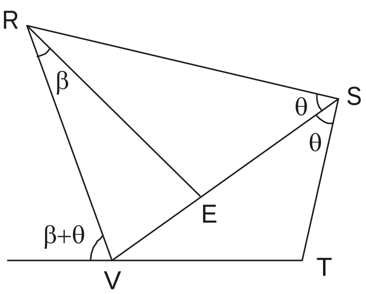
07. En el gráfico, se tiene un rectángulo ABCD en el cual : AD = 2CD, y donde :
$m\measuredangle OMA = m\measuredangle BPO$. Si : $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$ se intersectan en O, de modo que : PO = 2 cm, QO = 4 cm y MO = 5 cm. Calcule NO.



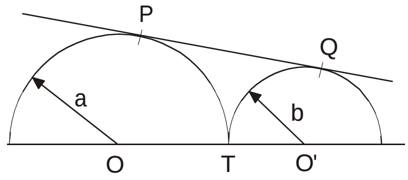
08. Calcule la medida de la hipotenusa del triángulo ABC.
Si : $x^2 + y^2 = 20\ u^2$; $l = \sqrt{8}$ u.



09. RS = 10 u, ES = 5 u, VE = 3 u.
Calcule ST.



10. P, Q y T son puntos de tangencia, a y b son los radios de las semicircunferencias. Determinar la distancia de T a la recta $\overleftrightarrow{PQ}$.



Practiquemos :

11. En un triángulo ABC, se ubica el incentro "I" sobre la bisectriz $\overline{BM}$, de tal manera que :
3IB = 2BM. Calcule AC, si : AB + BC = 24 u.

12. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas interiores $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CL}$ concurrentes en P, de tal manera que:
5AL = 2AB y 9BM = 5BC. Calcule : $(\frac{PB}{PN})$.

13. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz interior $\overline{BF}$, luego por F se traza $\overline{FQ} // \overline{AB}$ (Q en $\overline{BC}$), la bisectriz del ángulo FQC intersecta a $\overline{AC}$ en R.
Si : FR = a y RC = b. Calcule AF.

14. Del punto medio P del cateto $\overline{AB}$ de un triángulo ABC, recto en B, se traza la perpendicular $\overline{PH}$ a la hipotenusa $\overline{AC}$. De tal manera que : AH = 6 u y HC = 9 u. Calcule PB.

15. Calcule la longitud de la altura de un trapecio rectángulo, cuyas diagonales son perpendiculares entre sí y las bases miden 6 y 12 unidades.

16. Los lados $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ de un triángulo ABC miden 8 m y 10 m. Si la distancia del incentro al excentro relativo a $\overline{BC}$ es "x" y la distancia del incentro al vértice A es 5 m. Calcule "xº".

17. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se inscribe un cuadrado PLMN, de modo que el lado $\overline{PN}$ descansa sobre la hipotenusa $\overline{AC}$.
Calcule AC, si : LM = 12 u y AP - NC = 10 u.

18. Se tiene un triángulo ABC, sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ se construyen exteriormente los cuadrados ABPQ y BCMN. Calcule la medida del menor ángulo que determinan $\overline{AN}$ y $\overline{MQ}$.

19. En un triángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$, de modo que :
AB = 5 u, NB = 3 u y BC = 6 u. Calcule BM.

20. Se tiene un triángulo ABC, AB = c, BC = a y AC = b; donde la medida del ángulo "A" es dos veces la medida del ángulo "B". Si : b = 4 y c = 5. Calcule : $\frac{a}{b}$.

Problemas propuestos

21. En un triángulo ABC, se trazan las alturas $\overline{BH}$ y $\overline{CN}$; de tal manera que :
AN = 12 u, BN = 4 u y AH = 9 u. Calcule HC.

a) 15 u   b) $13,\widehat{8}$ u   c) 14 u
d) 13,2 u   e) $12,\widehat{3}$ u

22. Las longitudes de los lados de un triángulo son 4, 7 y 10 cm. Si otro triángulo semejante al primero, tiene un perímetro de 147 cm. Calcule la longitud de su lado menor.

a) 28 cm   b) 24 cm   c) 32 cm
d) 20 cm   e) 48 cm

23. Los lados de un triángulo ABC miden :
BC = 6 u, CA = 8 u, AB = 4u, respectivamente.
Por un punto M de AB se traza la paralela $\overline{MN}$ al lado $\overline{BC}$. Calcule la longitud de AM, de modo que el perímetro del triángulo MAN sea igual al perímetro del trapecio BMNC.

a) 3,5 u   b) 2,0 u   c) 1,5 u
d) 2,5 u   e) 3,0 u

24. En un rombo ABCD, de 12 m de lado, se toma el punto medio M de $\overline{BC}$. $\overline{AM}$ corta a $\overline{BD}$ en G y $\overline{DM}$ a $\overline{AC}$ en H. Calcule GH.

a) 4 m   b) 6 m   c) $2\sqrt{2}$ m
d) $3\sqrt{2}$ m   e) m

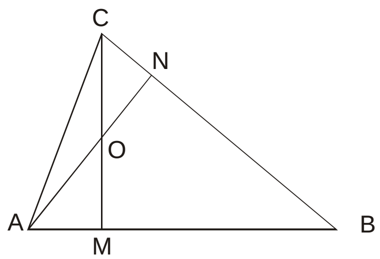
25. En un triángulo rectángulo, la bisectriz del ángulo recto divide a la hipotenusa en dos segmentos cuyas longitudes son $\sqrt{3}$ y 1, respectivamente. El menor de sus ángulos mide :

a) 30º b) 45º c) 18º
d) 60º e) 15º

26. En un triángulo ABC, se cumple que :
m∡BAC = 2m∡BCA; AB = 6 u y AC = 8 u.
Calcule $\overline{BC}$.

a) $3\sqrt{21}$ u b) $\sqrt{21}$ u c) $2\sqrt{21}$ u
d) $2\sqrt{14}$ u e) $3\sqrt{14}$ u

27. En la figura mostrada, el punto "O" es el ortocentro del triángulo ABC; BN = 2u, MB = 3u.
Calcule OC. AB + BC = 10u.



a) $\frac{3\sqrt{3}}{8}$ u b) $\frac{8}{3\sqrt{3}}$ u c) $\frac{8\sqrt{3}}{3}$ u
d) $\frac{27}{2\sqrt{3}}$ u e) $\frac{3\sqrt{3}}{2}$ u

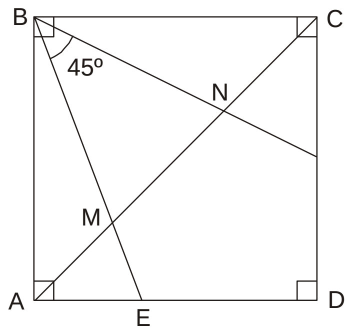
28. Si los radios de dos circunferencias miden 3 y 1 m. La mínima distancia entre los centros es 10 m, entonces la distancia entre el punto de intersección de las tangentes interiores y el punto de intersección de las tangentes exteriores comunes a las dos circunferencias es :

a) 14 m b) 7,5 m c) 7 m
d) 1,2 m e) 6,5 m

29. Por el baricentro G, de un triángulo ABC se traza una recta que corta a $\overline{AB}$ en E y a $\overline{BC}$ en F. Calcule FC.
Si : AE = a, EB = b y BF = c.

a) $\frac{b(a+c)}{a}$ b) $\frac{c(a-b)}{a}$ c) $\frac{c(b-a)}{b}$
d) $\frac{c(b+a)}{b}$ e) $\frac{(b+a)}{b}$

30. En la figura, ABCD es un cuadrado y ED = $3\sqrt{2}$ u.
Calcule NC.

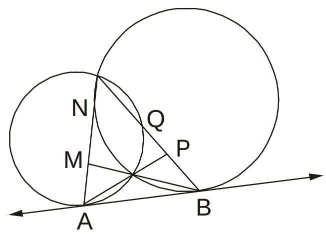


a) $\sqrt{2}$ u b) 2 u c) $2\sqrt{2}$ u
d) 3 u e) $3\sqrt{2}$ u

31. En un triángulo rectángulo AB recto en B, se trazan las bisectrices interiores $\overline{AM}$ y $\overline{CN}$, de tal manera que :
$\frac{1}{AN}+\frac{1}{CM}=5$. Calcule la longitud del radio de la circunferencia inscria en el triángulo ABC.

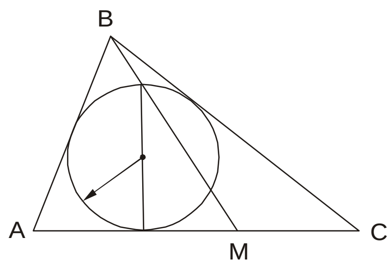
a) $\sqrt{5}$ u b) 1 u c) $\sqrt{2}$ u
d) $\sqrt{3}$ u e) $\frac{1}{5}$ u

32. En la figura, A y B son puntos de tangencia.
Si : MN . PQ = $4\sqrt{2}$ u^2. Calcule : AM . BP.



a) $4\sqrt{2}$ u^2 b) 8 u^2 c) 4 u^2
d) $8\sqrt{2}$ u^2 e) $6\sqrt{2}$ u^2

33. En la figura mostrada, calcule la relación de los perímetros de los triángulos BAM y BCM respectivamente.



a) 1 b) 2 c) 1/2
d) 1/3 e) 3/4

34. En un triángulo ABC, AB = 3u, BC = 12u.
Calcule la longitud de la bisectriz interior BM, si :
m∡B = 120°.

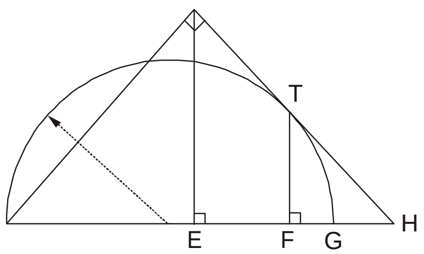
a) 2 u b) 2,4 u c) 4 u
d) 5 u e) 6 u

35. Se tiene un triángulo rectángulo ABC recto en B. Si en $\overline{AB}$ se ubican los puntos P y Q, tal que :
m∡ACP = m∡PCQ = m∡QCB; AP = a y PQ = b.
Calcule QB.

a) $\frac{a(a+b)}{2b}$ b) $\frac{2a(a+b)}{b}$ c) $\frac{b}{a}(a+b)$

d) $\frac{b}{a}(2a+b)$ e) $\frac{b(a+b)}{2a}$

36. En el gráfico : EF = 3u, FG = 2u.
Calcule GH, si : "T" es punto de tangencia.



a) 1 u b) 2 u c) 3 u
d) 4 u e) 2,5 u

37. Se tiene un triángulo ABC acutángulo con AC = 12 m. En su interior, desde un punto "F", se trazan las perpendiculares $\overline{FD}$ y $\overline{FE}$ a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Si : DE = 4 y BF = 6.
Calcule el circunradio del triángulo ABC.

a) 10 m b) 9 m c) 12 m
d) 15 m e) 20 m

38. Sea ABC un triángulo, donde :
AB + BC = 18 dm y el segmento que une el incentro con el baricentro es paralelo al lado $\overline{AC}$. Calcule AC.

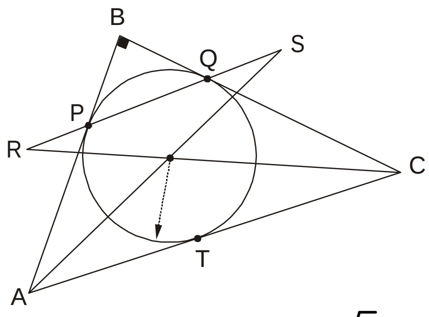
a) 6 dm b) 8 dm c) 9 dm
d) 12 dm e) 16 dm

39. En un triángulo ABC, se trazan 3 cevianas concurrentes $\overline{AM}$, $\overline{BN}$ y $\overline{CP}$; la prolongación de $\overline{PM}$ intersecta a la prolongación de $\overline{AC}$ en Q.
Si : AN = a y NC = b. Calcule CQ.

a) $\frac{a(a+b)}{a-b}$ b) $\frac{b(a+b)}{a-b}$ c) $\frac{b(a+b)}{a+2b}$

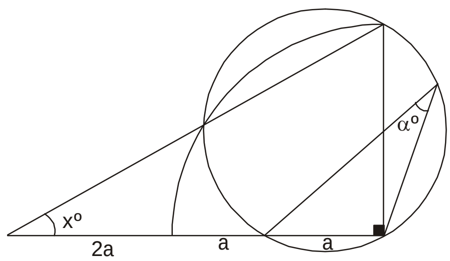
d) $\frac{a(a+b)}{2a+b}$ e) $\frac{b(a+b)}{2}$

40. En la figura : P, Q, T son puntos de tangencia.
Si : RS = a. Calcule AC.



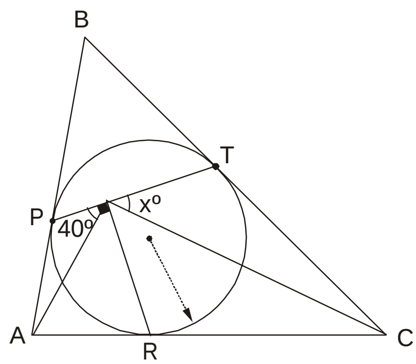
a) a b) 2a c) $a\sqrt{2}$
d) $\sqrt{3a}$ e) 0,75 . a

41. Del gráfico, calcule "xº", en función de "αº".



a) αº b) 2αº c) 3αº
d) 90º - αº e) 90º - 2αº

42. Si : P, T y R son puntos de tangencia en la figura.
Calcule "xº".

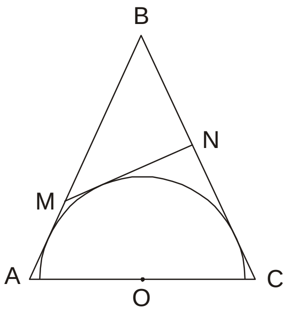


a) 20° b) 30° c) 40°
d) 50° e) 60°

43. En un paralelogramo, en la prolongación de $\overline{AB}$ se ubica el punto E, $\overline{ED}$ interseca a $\overline{BC}$ y a $\overline{AC}$ en M y N respectivamente.
Calcule ED, si : MN = 9 u y ND = 15 u.

a) 20 u   c) 16 u   d) 40 u
d) 25 u   e) 31 u

44. En la figura mostrada, el triángulo ABC es isósceles, "O" es el centro de la semicircunferencia $\overline{MN}$ es tangente a la circunferencia.
Si : AM = a y NC = b. Calcule AC.



a) $\sqrt{ab}$ b) $2\sqrt{ab}$
c) $\sqrt{a^2+b^2}$ d) $\dfrac{2ab}{a+b}$
e) $\dfrac{3ab}{a+b}$

45. En un triángulo ABC, se traza la bisectriz $\overline{AE}$ que interseca al lado $\overline{BC}$ en "D". Luego, desde los vértices B, C se trazan las perpendiculares $\overline{BH}$, $\overline{CE}$ a dicha bisectriz. Si: HD = 1 u y DE = 2u. Calcule AH.

a) 5 u   b) 4 u   c) 3 u
d) 2 u   e) 1 u

46. En un triángulo ABC, se ubican los puntos D, E y F en $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ y $\overline{EC}$ respectivamente, tal que : DE = EF, $\overline{AE} \perp \overline{DF}$; $\overline{ED} \perp \overline{AB}$, por B se traza una recta que intersecta perpendicularmente a la prolongación de $\overline{AE}$ en H y a la prolongación de $\overline{AC}$ en G. Si : $EH=\sqrt{2}$ u y AB = BC = $2\sqrt{10}$ u. Calcule BE.

a) $\sqrt{7}$ u   b) $2\sqrt{2}$ u   c) 3 u
d) $\sqrt{10}$ u   e) 4 u

47. En un paralelogramo ABCD, por el vértice A se traza la recta secante a la diagonal $\overline{BD}$ en M, al lado $\overline{BC}$ en N y a la prolongación de $\overline{DC}$ en Q. Si : AM = a y MN = b, calcule NQ.

a) $\dfrac{a^2-b^2}{b}$ b) $\dfrac{a^2+b^2}{a}$ c) $\dfrac{a^2-b^2}{b}$
d) $\dfrac{a^2-b^2}{a}$ e) $\dfrac{b^2-a^2}{b}$

48. En un triángulo ABC; se traza la mediana $\overline{AM}$ y sobre ella se ubica el punto P, del cual se trazan las perpendiculares $\overline{PQ}$ y $\overline{PR}$ a $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ respectivamente.
Calcule PR, si :
PQ = 3u, AB = 9 u y AC = 12 u.

a) 9 u   b) 9/2 u   c) 9/4 u
d) 9/5 u   e) 3 u

49. Dado un cuadrilatéro ABCD inscriptible, se prolongan los lados $\overline{DC}$ y $\overline{AB}$, (se cortan en E) y $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ (se cortan en F). Las bisectrices, los ángulos DFC y BEC se cortan en "O" y M y N son los puntos medios de $\overline{AC}$ y $\overline{BD}$ respectivamente.
Calcule la $m\measuredangle$ MON.

a) 165°   b) 160°   c) 135°
d) 150°   e) 180°

50. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas $\overline{BD}$ y $\overline{BF}$, tal que :

$$m\measuredangle ABD = m\measuredangle DBF = \frac{m\measuredangle FBC}{3}.$$

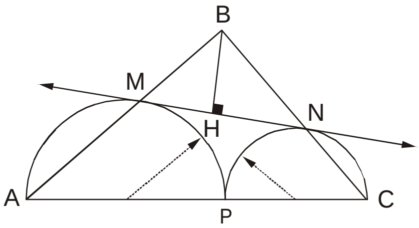
Si : AD = 3 u, DF = 2 u y FC = 10 u.
Calcule la $m\measuredangle$ DBF.

a) 45º   b) 15º   c) 22º
d) 45º/2   e) 37º/2

51. En un trapecio rectángulo ABCD, se tiene que :
$m\measuredangle A = 60°$, $m\measuredangle C = m\measuredangle D = 90°$ y BC = CD. En $\overline{AC}$ se ubica el punto F y se traza $\overline{FM} \perp \overline{AD}$ y $\overline{FN} \perp \overline{AB}$.
Calcule : FN, si : FM = 4u.

a) 2 u   b) $2\sqrt{3}$ u   c) 4 u
d) $4\sqrt{3}$ u   e) 8 u

52. En la figura mostrada, calcule MN, si : M, N y P son puntos de tangencia.
BH = 2 u y AC = 18 u.



a) 4 u   b) 5 u   c) 6 u
d) 8 u   e) 9 u

53. La circunferencia inscrita del triángulo ABC es tangente al lado $\overline{AC}$ en "Q", una recta secante al triángulo es tangente a la circunferencia en P, e interseca a los lados $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ en M y N respectivamente.
$(\overline{MC} \cap \overline{PQ}) = \{F\}$, MP = 4 u, QC = 8 u y FC = 10 u. Calcule MF.

a) 3 u b) 4 u c) 5 u
d) 6 u e) 8 u

54. En un triángulo ABC (recto en B); la m∢BAC = 53°, sea P un punto de la región interior de dicho triángulo, tal que :
PA = 15 u, PB = 12u y PC = 20 u.
Calcule AC.

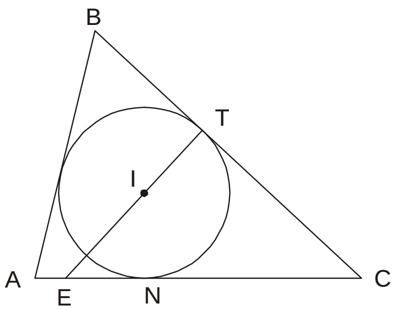
a) $\sqrt{11}$ u b) $\frac{4}{5}\sqrt{5}$ u

c) $\frac{\sqrt{25+6\sqrt{3}}}{5}$ u d) $\frac{\sqrt{25-6\sqrt{3}}}{5}$ u

e) $5\sqrt{25+12\sqrt{3}}$ u

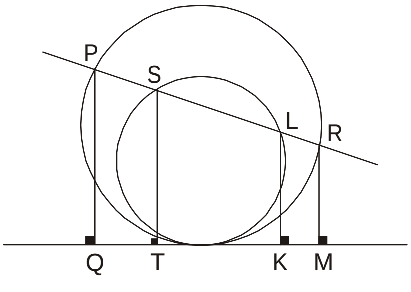
55. En el gráfico : AB = 7u, BC = 9 u y AC = 8 u.

Calcule : $\frac{EI}{ET}$.



a) 3/5 b) 3/4 c) 2/5
d) 2/3 e) 5/6

56. De la figura, calcule : PQ . RM, si :
ST . LK = 27 u^2.

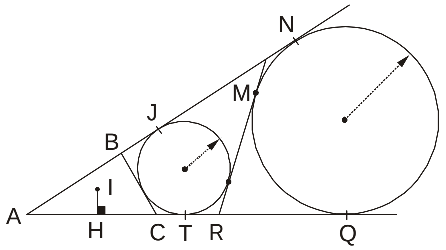


a) 25 u^2 b) 25/2 u^2 c) 27 u^2
d) 27/2 u^2 e) 9 u^2

57. En un trapecio ABCD $(\overline{BC} // \overline{AD}$ y $\overline{BC} < \overline{AD})$, por B se traza una paralela a $\overline{CD}$, que intersecta a $\overline{AC}$ en M y por C se traza una paralela a $\overline{AB}$ que interseca a $\overline{BD}$ en N.
Calcule la longitud del segmento $\overline{MN}$, sabiendo que: BC = 3u, AM = 6u y CM = 4 u.

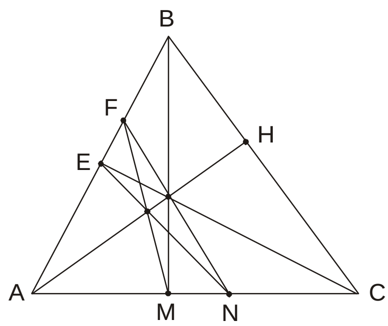
a) 1,40 u b) 1,50 u c) 1,20 u
d) 1,25 u e) 1,35 u

58. Si "I" es el incentro del triángulo ABC, y :
3(AH) = 4(RQ) = 6(CT) = 6(TR) = 12 u. Calcule HC.



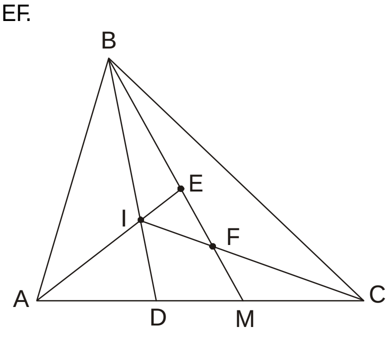
a) 1 u b) 2 u c) 3 u
d) 4 u e) 4/7 u

59. En el gráfico mostrado :
AE = 4 dm, EF = 2 dm, AM = 5 dm y NC = 12 dm.
Calcule la diferencia entre FB y MN.



a) 1 dm b) 2 dm c) 2,5 dm
d) 3 dm e) 4 dm

60. En el gráfico, "I" es el incentro del triángulo ABC y $\overline{BM}$ es una mediana. Si : $\frac{ID}{IB} = \frac{2}{3}$, EB = 6 dm y FM = 4 dm.
Calcular EF.



a) 1 dm b) 1,5 dm c) 2 dm
d) 2,5 dm e) 3 dm

Claves

21.	e
22.	a
23.	e
24.	a
25.	a
26.	d
27.	c
28.	b
29.	c
30.	d
31.	e
32.	a
33.	a
34.	b
35.	e
36.	d
37.	b
38.	c
39.	b
40.	c

41.	a
42.	c
43.	d
44.	b
45.	c
46.	d
47.	c
48.	c
49.	e
50.	d
51.	b
52.	c
53.	c
54.	e
55.	a
56.	c
57.	c
58.	a
59.	d
60.	c