

Capítulo

15

TEORÍA DE LA DIVISIBILIDAD

INTRODUCCIÓN

La divisibilidad numérica puede realizarse en los naturales, enteros, racionales ..., es por ello que presenta distintos grados de dificultad ya que muchos conceptos corresponden a una Aritmética Superior, llamada Teoría de Números, la cual se podría decir surge desde Euclides (Algoritmo para MCD); Fermat, Euler, Legendre, Gauss, que con su aporte (Discusiones aritméticas) contribuye al enriquecimiento de dicha teoría; llegando luego otros matemáticos como Dirichlet, Kronecker, Riemann, Dedekind, entre otros que siguen aportando y muestran la importancia que ahora tiene dicha teoría.

Nosotros nos limitaremos a trabajar en el conjunto numérico de los enteros.

Sabemos que la suma, diferencia y producto de dos números enteros es siempre entero, es decir, las operaciones de Adición, Sustracción y Multiplicación son cerradas en $\mathbb{Z}$. Pero el cociente de dos enteros puede ser o no entero, se hace necesario hablar de números divisibles y no divisibles.

NÚMEROS DIVISIBLES: Dos números enteros a y b son divisibles si:

$$\begin{array}{r} a \\ 0 \end{array} \overline{) b} \quad c : \text{entero}$$

Por división entera $b > 0$, entonces $b \in \mathbb{Z}^+$ (módulo); de la división se obtiene:

$$a = b \times c$$

En la cual diremos que " a " es múltiplo de " b " y lo denotaremos:

$$\boxed{a = b}$$

También se utilizan las notaciones:

$$a = mb$$

$$a = \frac{0}{b}$$

Si a es divisible entre b , se puede decir que " b " divide a " a " esto se denota: $b|a$

Ejemplo: 91 es divisible entre 13 porque

$$\begin{array}{r} 91 \\ 0 \end{array} \overline{) 13} \quad 7$$

También diremos $91 = \frac{0}{13}$ porque $91 = 13 \times 7$.

Nota:

$$\begin{array}{c} \frac{0}{12} = 12K \begin{cases} 0; 12; 24; \dots \\ -12; -24; \dots \end{cases} \\ \downarrow \\ \text{Entero} \end{array}$$

NÚMEROS NO DIVISIBLES: a y b no son divisibles si la división de a por b es inexacta.

Ejemplo:

$$\begin{array}{r} 37 \\ 2 \end{array} \overline{) 7} \quad 5$$

$$37 = \frac{0}{7} + 2 = \frac{0}{7} - 5$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \quad \quad \downarrow \\ 35 \quad \quad 42 \end{array}$$

PRINCIPIOS DE LA DIVISIBILIDAD:

I. OPERACIONES CON MÚLTIPLOS

$$1. \quad \frac{0}{n} + \frac{0}{n} = \frac{0}{n}$$

$$2. \quad \frac{0}{n} - \frac{0}{n} = \frac{0}{n}$$

$$3. \quad \frac{0}{n} \cdot \frac{0}{n} = \frac{0}{n}$$

$$4. \quad \frac{0}{n} \cdot K = \frac{0}{n \cdot K} \quad (K \in \mathbb{Z}^+)$$

$$5. \quad \left(\frac{0}{n}\right)^K = \frac{0}{n}$$

$$6. \quad \left(\frac{0}{n+r}\right)^K = \frac{0}{n+r^K} \quad (K \in \mathbb{Z}^+)$$

$$7. \quad \left(\frac{0}{n+r_1}\right)\left(\frac{0}{n+r_2}\right) = \frac{0}{n+r_1 \cdot r_2}$$

II. Si: $N = \frac{0}{a}$; $N = \frac{0}{b}$;; $N = \frac{0}{w}$ entonces:

$$N = \frac{0}{\text{MCM}(a, b, \dots, w)}$$

III. Sea $A \cdot B = \frac{0}{n}$; si A y n no tienen divisores comunes, excepto la unidad (primos entre sí) entonces:

$$\boxed{B = \frac{0}{n}}$$

ECUACIÓN DIOFÁNTICA LINEAL: Es una ecuación algebraica cuyas variables son enteras:

$$\boxed{Ax \pm By = C}$$

Ejemplo 1:

Resolver en $\mathbb{N}$

$$87x + 111y = 3903$$

Ejemplo 2:

¿Cuántos números naturales no se pueden obtener como $8x + 11y$, donde x e y son dos números enteros no negativos?

Rpta:

RESTOS POTENCIALES: Son los diversos residuos que se obtienen al dividir las diferentes potencias de una misma base entre un cierto número llamado módulo.

Ejemplo: Calcule los restos potenciales de la base 10, respecto al módulo 7.

$$10^n = 7 + r \quad n \in \mathbb{N}$$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8...
r	1	3	2	6	4	5	1	3	2....

Observamos que: $10^6 = 7 + 1$ y que en total hay 6 residuos diferentes: $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ a dicha cantidad se le llama gaussiano.

$$10^{\text{gaussiano}} = 7 + 1$$

Aplicación 1: ¿Cuál es el resto de dividir 10^{375} entre 7?

Aplicación 2: ¿Cuál es el resto de dividir 6^{307} entre 8?

Aplicación 3: ¿Cuál es el resto de dividir $76^{\text{TRILCE 2005}}$ entre 14?

CRITERIOS DE LA DIVISIBILIDAD:

Son ciertas reglas prácticas que aplicados a las cifras de un numeral permiten determinar su divisibilidad respecto a un cierto número.

PRINCIPALES CRITERIOS:

$$\begin{array}{l} \overline{abcd} = 2 \Leftrightarrow d = 2 \\ \overline{abcd} = 4 \Leftrightarrow \overline{cd} = 4 \\ \overline{abcd} = 8 \Leftrightarrow \overline{bcd} = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overline{abcd} = 3 \Leftrightarrow a + b + c + d = 3 \\ \overline{abcd} = 9 \Leftrightarrow a + b + c + d = 9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overline{abcde} = 5 \Leftrightarrow e = 5 \text{ ó } 0 \\ \overline{abcde} = 25 \Leftrightarrow \overline{de} = 25 \\ \overline{abcde} = 125 \Leftrightarrow \overline{cde} = 125 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} + - + - + \\ \overline{abcde} = 11 \Leftrightarrow a - b + c - d + e \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 231231 \\ \overline{abcdef} = 7 \Leftrightarrow -2a - 3b - c + 2d + 3e + f = 7 \\ - + \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 431431 \\ \overline{abcdef} = 13 \Leftrightarrow 4a + 3b - c - 4d - 3e + f = 13 \\ + - + \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overline{1(10)1(10)1} \\ \overline{abcde} = 33 \Leftrightarrow a + 10b + c + 10d + e = 33 \\ \overline{1(10)1(10)1} \\ \overline{abcde} = 99 \Leftrightarrow a + 10b + c + 10d + e = 99 \end{array}$$

COMPLEMENTOS

DIVISIBILIDAD EN OTRA BASE:

$\overline{abcde(n)} = k$; por restos potenciales:

Base n : $n^0 \ n^1 \ n^2 \ n^3 \ n^4 \ \dots$

Módulo k : $1 \ r_1 \ r_2 \ r_3 \ r_4 \ \dots$

Entonces se cumple:

$$r_4 a + r_3 b + r_2 c + r_1 d + e = k$$

DIVISIBILIDAD POR $(n + 1)$ EN BASE n :

$$\begin{array}{l} - + - + \\ \overline{abcd(n)} = \frac{0}{(n+1)} \Leftrightarrow -a + b - c + d = \frac{0}{(n+1)} \end{array}$$

DIVISIBILIDAD POR $(n - 1)$ EN BASE n :

$$\overline{abcd(n)} = \frac{0}{(n-1)} \Leftrightarrow a + b + c + d = \frac{0}{(n-1)}$$

PROPIEDAD:

$$\overline{abcde}_n = \begin{cases} \frac{0}{n} + e \\ \frac{0}{n^2} + \overline{de}_n \\ \frac{0}{n^3} + \overline{cde}_n \\ \frac{0}{n^4} + \overline{bcde}_n \\ \vdots \end{cases}$$

CONGRUENCIA:

Dos números a y b son congruentes respecto al módulo m si al dividir a y b entre m el resto es el mismo.

EJEMPLO:

17 y 32 son congruentes respecto al módulo 5 porque:

$$17 = \overset{0}{5} + 2 \quad ; \quad 32 = \overset{0}{5} + 2$$

NOTACIÓN

$$a \equiv b(m) \quad \text{o} \quad a \equiv b \pmod{m}$$

Se verifica : $a - b = \overset{0}{m}$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. El número de enteros divisibles por 3 y por 7 que hay entre 100 y 250 es:
- a) 8 b) 9 c) 11
d) 6 e) 7
02. ¿Cuántos números de 3 cifras, que sean impares y múltiplos de 5 existen en el sistema decimal?
- a) 90 b) 180 c) 200
d) 450 e) 900
03. Si al cuadrado de un número de dos dígitos se le resta el cuadrado del número formado por los dos dígitos en orden invertido, el resultado es divisible por:
- a) 7.
b) El producto de los dígitos.
c) La suma de los cuadrados de los dígitos.
d) La diferencia de los dígitos.
e) 13.
04. Un número de 6 cifras es constituido repitiendo otro número de 3 cifras. Entonces podemos afirmar que dicho número de 6 cifras es siempre divisible entre los números:
- a) 7, 9, 17 b) 11, 13, 17 c) 3, 7, 19
d) 7, 11, 17 e) 7, 11, 13
05. En una canasta hay entre 50 y 60 huevos. Si los cuento tomándolos de tres en tres me sobran dos; pero si los cuento tomándolos de cinco en cinco me sobran 4. ¿Cuántos huevos hay en la canasta?
- a) 55 b) 59 c) 57
d) 56 e) 58
06. En una función de cine, entre adultos, jóvenes y niños suman 815 personas. Los $\frac{5}{11}$ de los jóvenes son mujeres. La cantidad de adultos es igual a la séptima parte de la cantidad de jóvenes. Sabemos que la cantidad de niños es menor que la de adultos y que la tercera parte de los jóvenes llegaron tarde. Encontrar la cantidad de niños.
- a) 18 b) 22 c) 23
d) 25 e) 28
07. A un evento deportivo asistieron a lo más 200 personas. Si se observa que la quinta parte de los señores comen helado, las señoras representan la octava parte de los señores y los niños representan la tercera parte de las señoras. Halle cuántos niños asistieron.
- a) 15 b) 10 c) 5
d) 120 e) 20
08. La suma de todos los números pares menores que 100 y no múltiplos de 5 es:
- a) 2000 b) 2050 c) 1950
d) 1988 e) 1590
09. ¿Cuál es el resto de dividir $199^2 + 2001^2 + 2003^2$ entre 8?
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6
10. ¿Cuál es la suma de las cifras que deben sustituir al 2 y 3 del número 52103 para que sea divisible por 72?
- a) 12 b) 13 c) 14
d) 15 e) 16
11. Un número de tres cifras es divisible por 8, si se invierte el orden de sus cifras es divisible por 5; además si se suprime la cifra de unidades, las cifras restantes forman un múltiplo de 17. La suma de las cifras de dicho número es:
- a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 11
12. Se tiene cierto número N, del cual se sabe que al dividirlo entre 3, 4, 5, 6 y 9 deja residuo 1. Pero al dividirlo entre 7 deja residuo 0. Hallar la suma de cifras del menor número que cumple con tal condición.
- a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 14
13. A un número de 4 dígitos donde sus 3 últimas cifras son iguales se le ha restado otro, que se obtuvo al invertir el orden de las cifras del primero. Si la diferencia es múltiplo de 7, hallar la diferencia.
- a) 777 b) 1554 c) 2331
d) 4662 e) 6993
14. La cifra de las unidades del número $3^{401} - 1$ es:
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
15. Determinar la suma de todos los números de cinco cifras de la forma $\overline{27a4b}$ de modo que sean divisibles por 4 y 9.
- a) 81332 b) 82462 c) 82332
d) 82233 e) 82234

16. Si: n es un número entero, entonces $n^2(n^2 - 1)$ siempre es divisible por:
- a) 12 – n b) 48 c) 12 y 24
d) 24 e) 12
17. En el sistema de base 7 la cifra de las unidades $(1459)^{55}$ es:
- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6
18. A un número de tres cifras múltiplo de 6, se le agrega uno y se convierte en múltiplo de 7 y si se le agrega una unidad más, se convierte en múltiplo de 8. Hallar la suma de sus cifras.
- a) 11 b) 10 c) 6
d) 16 e) 17
19. Una compañía de aviación compra 13 avionetas por 16,5 millones de nuevos soles. Las avionetas que compra son del tipo A a un precio de 1,1 millones, del tipo B a un precio de 1,3 millones y del tipo C a 1,8 millones.
¿Cuántas avionetas compró de cada tipo?
- a) 2 ; 11; 0 b) 3 ; 7 ; 3 c) 5 ; 6 ; 2
d) 7 ; 4 ; 2 e) 8 ; 4 ; 1
20. Se convierte al sistema de numeración de base 7 el número 2^{1019} .
¿Cuál será su cifra de unidades en dicha base?
- a) 2 b) 4 c) 5
d) 6 e) 8
21. Si: $N = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + k$,
Calcular el menor valor que puede tener " N ", si $k = \frac{0}{7}$
y $k+1 = \frac{0}{15}$.
Dar como respuesta la suma de cifras de " N ".
- a) 16 b) 9 c) 10
d) 12 e) 18
22. Decir cuál de los enunciados es falso:
- a) p es par $\leftrightarrow p$ es múltiplo de 2.
b) Ninguna.
c) p termina en cero o en cinco $\leftrightarrow p$ es múltiplo de 5.
d) p y q pares $\leftrightarrow p + q$ es par.
e) p es impar $\leftrightarrow p$ no es múltiplo de 2.
23. ¿Cuántos números de 3 cifras, que son divisibles entre 5, dan como residuo 5 al ser divididos entre 17?
- a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 11
24. ¿Cuántos números de la forma $\overline{abba}_{(8)}$ son múltiplos de 17?
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) Más de 4
25. ¿Cuántos números de la forma $\overline{abcab}$ son divisibles entre 385?
- a) 4 b) 36 c) 18
d) 9 e) 27
26. La suma de los números naturales del 1 al $5N$ origina un $\frac{0}{35}$. Si N tiene 3 cifras, ¿cuál es la suma de cifras del menor valor que puede tomar dicha suma?
- a) 10 b) 11 c) 12
d) 18 e) 15
27. Hallar el resto de dividir $3^{42^{46}}$ entre 11.
- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6
28. El número de pisos de un edificio está comprendido entre 100 y 130. A dicho número, le falta una unidad para ser múltiplo de 3; le falta 6 unidades para ser múltiplo de 8 y le sobran 2 para ser múltiplo de 10.
¿Cuál es el número de pisos?
- a) 112 b) 122 c) 121
d) 107 e) 111
29. Al dividir $15!$ entre $\overline{abc}$, se obtiene 75 de residuo y al dividir $16!$ entre $\overline{abc}$ da 23 de residuo.
Hallar el residuo de dividir $19!$ entre $\overline{abc}$.
- a) 73 b) 28 c) 42
d) 75 e) 79
30. Hallar el resto de dividir $36^{37^{38}}$ entre 11.
- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 8
31. Si el numeral $\overline{2a22a222a\dots a}$ tiene 90 cifras y es divisible por 9, hallar el mayor valor de " a ".
- a) 7 b) 6 c) 9
d) 4 e) 8

32. Un número posee 26 cifras, la primera de izquierda a derecha es 8 y las restantes son 6, ¿Cuál será la cifra de las unidades del número equivalente a él, en base 7?
- a) 6 b) 5 c) 4
d) 3 e) 2
33. Si: $N = \overline{abcd}$
Tal que: $\overline{abcd} = 11$; y $a + b + c + d = d^2$
Hallar la suma de cifras de N.
- a) 10 b) 12 c) 14
d) 16 e) 18
34. Encontrar el mayor número de 4 cifras que al ser dividido entre 18; 42 y 56 deja en cada caso el máximo residuo posible.
- a) 8675 b) 9876 c) 9575
d) 9972 e) 9996
35. Respecto a cuántos módulos, menores que 400, son incongruentes 1031 y 534?
- a) 397 b) 393 c) 396
d) 390 e) 394
36. Un alumno recuerda que $\overline{53a33b5}$ es el número telefónico de su amiga. También se acuerda que $\overline{3a33b}$ es múltiplo de 7 y de 11 y no contiene ceros. Determine la suma de los dígitos de dicho número telefónico.
- a) 29 b) 28 c) 27
d) 26 e) 25
37. Si: $489\overline{mnm} = \frac{0}{11} + 4$
Indique la suma de todos los valores que toma $\overline{mnm}$
- a) 1980 b) 3960 c) 4500
d) 10160 e) 12010
38. ¿Cuál es el menor número de tres cifras que es igual a 27 veces la suma de sus cifras?
Dar como respuesta la cifra de las decenas.
- a) 1 b) 2 c) 4
d) 6 e) 8
39. Para cada número natural "n", definimos:
$$U_n = 16n^2 + 8n + 6(1 - 5^n) + 128$$

Entonces el residuo de dividir U_n entre 64 es:
Sugerencia: Considerar la expresión:
$$U_{n+1} - 5U_n$$
- a) 1 b) 4 c) 0
d) 2 e) n
40. Sabiendo que $n \in \mathbb{N}$ y además $x \neq 5$.
Calcular el residuo de dividir E entre 5, si:
$$E = x^{100n} + 4x^{200n} + 9x^{300n} + \dots + 144x^{1200n}$$
- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4
41. ¿Para qué valores de n, la expresión $n^2 + n - 12$ es π (múltiplo de π)?
- a) $n = \pi - 3$ b) $n = \pi + 4$
c) $n = \pi - 4$ o $n = \pi + 3$
d) $n = \pi + 2$ e) $n = \pi - 2$
42. Dado un conjunto de números enteros positivos no necesariamente distintos, se realizan las siguientes 10 operaciones: Se descarta el primero y se suman los 9 restantes, se descarta el segundo y se suman los 9 restantes, y se sigue así hasta descartar el último y sumar los nueve restantes, de esta manera se obtienen sólo nueve resultados distintos, que son: 86; 87; 88; 89; 90; 91; 92; 93; 96. Hallar los diez números iniciales. Dar uno de estos.
- a) 0 b) 1 c) 4
d) 18 e) 3
43. Si el número $31\overline{mnpq3}$ se expresa en base 5, ¿Cuál es la suma de sus 2 últimas cifras?
- a) 6 b) 4 c) 8
d) 5 e) 3
44. Se sabe: $\overline{pmn}^{\frac{0}{5}} = 5 + 3$
¿Cuántos valores toma $\overline{pnm}$?
- a) 81 b) 90 c) 63
d) 99 e) 72
45. Si los números n y p no son múltiplos de 5, entonces la expresión siguiente:
$$32p^{32n} + 28p^{28n} + 24p^{24n} + \dots + 4p^{4n}$$
 es:
- a) $\frac{0}{5}$ b) $\frac{0}{5} + 1$ c) $\frac{0}{5} + 2$
d) $\frac{0}{5} - 2$ e) $\frac{0}{5} - 1$
46. Si: $21 \times \overline{mnm}^{\frac{0}{4}} = 4 + 1$
¿Cuántos valores puede asumir $\overline{mnm}$ que sean múltiplos de 3 pero no de 9?
- a) 3 b) 5 c) 6
d) 22 e) 7

47. Hallar el mayor número de 3 cifras $\overline{abc}$, tal que se cumpla que $\overline{abc}^{\overline{abc}} = 9 + 7$
Y dar como respuesta la suma de sus cifras.
- a) 15 b) 14 c) 13
d) 12 e) 16
48. Un número $M = 23 + 8$ se divide entre $N = 23 + 6$ y se obtiene un cociente de tres cifras $C = 13 + 6$ y un resto $R = 5$.
¿Cuántos valores posibles puede tomar el cociente?
- a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4
49. Un cierto número es una potencia de 2 y acaba en 68. Hallar la suma de cifras de los valores que puede tomar la cifra de las decenas del exponente.
- a) 10 b) 15 c) 20
d) 25 e) 30
50. Si: $\overline{xy} = 4$; $\overline{yx}6^{\overline{xy}} + \overline{x5}^{\overline{yx}} = 10 + y - x$, hallar el máximo valor de: $x + y$
- a) 3 b) 4 c) 5
d) 7 e) 11
51. Calcule el resto de N entre 7 donde:
 $X = 5 \times \overline{abc}^1 + 5^2 \times \overline{abc}^2 + 5^3 \times \overline{abc}^3 + \dots + 5^{1031} \times \overline{abc}^{1031}$
Además, se sabe que $\overline{abc}$ no es divisible por 7.
- a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 0
52. Si: $7208^{2064} = \dots \overline{xyzw}^{(7)}$
Hallar: $x + y + z + w$
- a) 17 b) 16 c) 13
d) 14 e) 15
53. Si: $\overline{abbaaa}$ es divisible por 72. Calcular el residuo al dividir.
- $(\overline{ababab\dots})^{\overline{UNI98}}$ entre 28
ddd42 cifras
- a) 0 b) 8 c) 7
d) 9 e) 27
54. ¿Cuál es el conjunto de todos los números n tales que la expresión $f(n) = 3 \times 5^{2n+1} + 2^{3n+1}$ es divisible entre 17?
- a) $\{n \in \mathbb{Z} / n \geq 5\}$
b) $\{n \in \mathbb{Z} / n \leq 17\}$
c) $\emptyset$
d) $\{n \in \mathbb{Z} / n \geq 0\}$
e) $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots, 16, 17\}$
55. Se sabe que el numeral $\overline{mnpq} = 5$, también $\overline{qm} = 7$ y $\overline{nmnpqpp}$ es múltiplo de "k", donde "k" es la cantidad de números de 3 cifras que son $\overline{8}$, tales que al sumarle 4 se convierten en $\overline{12}$.
Dar como respuesta la suma de los valores que toma "n".
- a) 17 b) 13 c) 10
d) 12 e) 16
56. De los números de 4 cifras que son múltiplos de 9, ¿cuántos hay que tienen todas sus cifras significativas y distintas entre sí?
- a) 216 b) 108 c) 226
d) 332 e) 118
57. Hallar el numeral de 5 cifras que sea igual a 45 veces el producto de sus cifras.
Dar la suma de sus cifras.
- a) 18 b) 27 c) 36
d) 45 e) 9
58. ¿Cuántos números enteros de 4 cifras $\overline{mcdu}$ existen, tal que al añadir una unidad al producto formado por sus dos grupos de cifras consecutivas $\overline{mc}$ y $\overline{du}$, se obtenga el número invertido, es decir:
 $nc \cdot du + 1 = udcn$?
- a) 6 b) 15 c) 12
d) 23 e) 24
59. Hallar la suma de todos los números no negativos que no se pueden obtener con la expresión: $E = 6a + 5b$, donde a y b son números enteros no negativos.
- a) 70 b) 80 c) 60
d) 50 e) 40
60. Hallar la suma de cifras del residuo que se obtiene al dividir $2 \times (278!)$ entre 281.
- a) 1 b) 4 c) 6
d) 10 e) 12

Claves

01.	e
02.	a
03.	d
04.	e
05.	b
06.	c
07.	c
08.	a
09.	c
10.	a
11.	b
12.	a
13.	e
14.	b
15.	c
16.	e
17.	b
18.	c
19.	d
20.	b
21.	b
22.	d
23.	c
24.	c
25.	c
26.	c
27.	c
28.	b
29.	e
30.	c

31.	e
32.	e
33.	d
34.	c
35.	c
36.	a
37.	e
38.	c
39.	c
40.	a
41.	c
42.	c
43.	b
44.	b
45.	e
46.	c
47.	a
48.	d
49.	d
50.	e
51.	a
52.	c
53.	a
54.	d
55.	d
56.	d
57.	b
58.	e
59.	b
60.	d