

Capítulo

4

PROMEDIOS

INTRODUCCIÓN

El **promedio aritmético** es una medida de tendencia central, que tiene importancia en el caso en que los datos se junten aditivamente para obtener un total. De hecho, puede interpretarse como un valor que podría sustituir a cada uno de los datos para obtener la misma suma total.

El **promedio geométrico** por su parte, es relevante cuando los datos se usan multiplicativamente para obtener un resultado. Es así que puede interpretarse como un valor, que puede sustituir a cada dato, para producir el mismo producto total.

El **promedio armónico** tiene importancia cuando usamos los datos sumando los recíprocos de cada uno de los datos y se puede interpretar con un valor que puede sustituir a cada dato para producir la misma suma de los recíprocos.

PROMEDIO

Dado un conjunto de datos diferentes es frecuente calcular un valor representativo de ellos, que este comprendido entre el menor y el mayor de ellos; a dicha cantidad se le llama: promedio o valor medio o simplemente media de los datos. Sean "n" cantidades en sucesión monótona creciente:

$$a_1 ; a_2 ; a_3 ; \dots ; a_n$$

El promedio de ellas será "p" si:

$$a_1 < p < a_n$$

PROMEDIOS MÁS UTILIZADOS

1. Promedio Aritmético o Media Aritmética (M. A.)

$$M.A. = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n}$$

Aplicación:

Un vendedor independiente ganó en el Verano pasado: Enero S/. 800; Febrero S/. 1200 y Marzo S/. 1300. ¿Cuál fue su promedio mensual?

Resolución:

El promedio mensual viene a ser la Media Aritmética (M. A.) de dichas cantidades.

$$M.A. = \frac{S/.800 + S/.1200 + S/.1300}{3} = S/.1100$$

2. Promedio Geométrico o Media Geométrica (M.G.)

$$M.G. = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$$

Aplicación:

En los últimos 5 meses, el gobierno actual registró una tasa de inflación mensual de 2%, 5%, 20%, 20% y 25%. Encuentre la tasa de inflación mensual promedio durante ese tiempo.

Resolución:

El promedio de dichas tasas viene a ser la media geométrica (M. G.) de dichas tasas.

$$MG = \sqrt[5]{2\% \times 5\% \times 20\% \times 20\% \times 25\%}$$

$$MG = 10\%$$

3. Promedio Armónico o Media Armónica (M.H.)

$$M.H. = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

Aplicación:

Un ama de casa gasta S/. 30, cada mes, durante 3 meses consecutivos, en la compra de aceite. El primer mes compró a S/. 10 el galón, el segundo mes lo compró a S/. 6 el galón y el tercer mes lo compró a S/. 3 el galón; diga entonces ¿cuál fue el costo promedio mensual?

Resolución:

$$\text{Costo Promedio} = \frac{\text{Costo Total}}{\# \text{ galones}}$$

Entonces el costo promedio es:

$$\frac{\frac{S/.30}{S/.10} + \frac{S/.30}{S/.6} + \frac{S/.30}{S/.3}}{3} = \frac{S/.90}{18} = S/.5$$

Podemos observar que el costo promedio es la media armónica de S/.10, S/.6 y S/.3 es decir:

$$M.H. = \frac{3}{\frac{1}{10} + \frac{1}{6} + \frac{1}{3}} = 5$$

PARA DOS CANTIDADES a y b

$$M.A. = \frac{a+b}{2}$$

$$M.G. = \sqrt{a \cdot b}$$

$$M.H. = \frac{2ab}{a+b}$$

PROPIEDADES

1. Para "n" cantidades se cumple:

$$M.A. \geq M.G. \geq M.H.$$

2. Para dos cantidades a y b se cumple:

$$M.A.(a,b) \cdot M.H.(a,b) = [M.G.(a,b)]^2$$

3. El error que se comete al tomar la media aritmética (M.A.), como media geométrica (M.G.) para dos números es:

$$M.A. - M.G. = \frac{(a-b)^2}{4(M.A. + M.G.)}$$

PROMEDIO PONDERADO (P.P.)

Es un caso particular del promedio aritmético, donde una o más cantidades se repiten dos o más veces.

Aplicación:

Al final del semestre académico, un alumno de la Universidad observa su récord de notas:

Curso	Nº de créditos	Nota
Matemática I	6	12
Química I	4	14
Física I	3	15
Economía	2	13

Determine su promedio.

Resolución:

El número de créditos indica las veces que se repite cada nota. Entonces el promedio ponderado es:

$$P.P. = \frac{6 \cdot 12 + 4 \cdot 14 + 3 \cdot 15 + 2 \cdot 13}{6 + 4 + 3 + 2} = 13,26$$

En general:

Datos: $a_1 ; a_2 ; a_3 ; \dots ; a_n$

Pesos: $p_1 ; p_2 ; p_3 ; \dots ; p_n$

El Promedio Ponderado (P.P.) es:

$$P.P. = \frac{a_1 p_1 + a_2 p_2 + \dots + a_n p_n}{p_1 + p_2 + \dots + p_n}$$

NOTA: Cuando no nos mencionen qué tipo de promedio se ha tomado y sólo se diga promedio de, consideraremos al Promedio Aritmético.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. ¿Cuál es el valor medio entre 0,10 y 0,20?
- a) 0,09 b) 0,21 c) 0,11
d) 0,15 e) 0,18
02. De un grupo de 6 personas, ninguna de ellas es menor de 15 años. Si el promedio aritmético de las edades es 18 años.
¿Cuál es la máxima edad que puede tener una de ellas?
- a) 33 b) 32 c) 34
d) 35 e) 31
03. Hallar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones
I. El promedio aritmético de 12 ; 24 ; 16 y 40 es 23.
II. Si el promedio geométrico de 4 números naturales no consecutivos, y diferentes entre sí es $3\sqrt[4]{2}$; entonces la razón aritmética entre el mayor y menor número es 8.
III. Si la MG y MH de dos números es 150 y 90, entonces la MA es 250.
- a) VFV b) VVV c) FVV
d) VFF e) FFV
04. Si el promedio de tres números consecutivos es impar, entonces el primer número debe ser:
- a) Múltiplo de 3.
b) Impar.
c) Par.
d) Primo absoluto.
e) Cuadrado perfecto.
05. La media aritmética de 100 números es 24,5. Si cada uno de ellos se multiplica por 3,2, la media aritmética será:
- a) 88,8 b) 70 c) 78,4
d) 21,3 e) 20
06. Para 2 números a y b tales que : $a = 9b$, se cumple que: $MG(a;b) = k \cdot MH(a;b)$
Calcular el valor de "k"
- a) 1,888... b) 2,999... c) 1,777...
d) 2,333... e) 1,666...
07. El promedio de 20 números es 40. Si agregamos 5 números, cuyo promedio es 20, ¿Cuál es el promedio final?
- a) 42 b) 20 c) 40
d) 30 e) 36
08. Si luego de dar un examen en una aula de 60 alumnos, se sabe que el promedio de notas de 15 de ellos es 16 y el promedio de notas del resto es 12.
Hallar el promedio de notas de los 60 alumnos.
- a) 14 b) 13 c) 12
d) 15 e) 16
09. ¿Cuál es el ahorro promedio diario de 15 obreros, si 5 lo hacen a razón de 10 soles por persona y el resto 5 soles cada uno?
(en soles)
- a) $\frac{5}{2}$ b) $\frac{2}{5}$ c) $\frac{20}{3}$
d) $\frac{3}{20}$ e) 2
10. En un salón de clases de 20 alumnos, la nota promedio en Matemática es 14; en el mismo curso la nota promedio para otra aula de 30 alumnos es 11.
¿Cuál será la nota promedio, si se juntan a los 50 alumnos?
- a) 12,5 b) 12,2 c) 12
d) 13 e) 13,2
11. Indique cuáles son verdaderos o falsos :
I. El promedio de - 10; 12; -8; 11 y - 5 es cero.
II. Sólo se cumple para 2 cantidades : $MG^2 = MA \cdot MH$
III. Si se cumple que para 2 cantidades que su $MA = 2,5$ y su $MH = 6,4$; entonces, su $MG = 4$.
- a) VFV b) VFF c) VVF
d) FVF e) VVV
12. Un trailer debe llevar una mercadería de una ciudad "A" a otra ciudad "B", para lo cual el trailer utiliza 10 llantas para recorrer los 780 Km que separa dichas ciudades. El trailer utiliza también sus llantas de repuesto, con lo cual cada llanta recorre en promedio 600 Km.
¿Cuántas llantas de repuesto tiene?
- a) 8 b) 10 c) 3
d) 4 e) 6
13. El promedio aritmético de 53 números es 600; si se retiran los números 150; 120 y otro; el promedio aumenta en 27,9.
Calcular el otro número.
- a) 128 b) 135 c) 137
d) 141 e) 147

14. Un automóvil cubre la distancia entre las ciudades A y B a 70 Km por hora. Luego, retorna a 30 Km por hora. ¿Cuál es la velocidad media de su recorrido?
- a) Falta el dato de la distancia entre A y B.
b) 42 Km por hora.
c) 50 Km por hora.
d) 45 Km por hora.
e) 40 Km por hora.
15. La ciudad de Villa Rica de 100 casas, tiene un promedio de 5 habitantes por cada casa y la ciudad de Bellavista, de 300 casas, tiene un promedio de 1 habitante por casa. ¿Cuál es el promedio de habitantes por casa para ambas ciudades?
- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
16. La edad actual de Félix es el doble de la de Pedro. Hace 4 años, la diferencia de sus edades era el promedio de sus edades actuales disminuido en 5 años. Hallar la edad, en años, de Félix.
- a) 10 b) 12 c) 14
d) 16 e) 20
17. De 500 alumnos de un colegio, cuya estatura promedio es de 1,67 m; 150 son mujeres. Si la estatura promedio o media aritmética de las mujeres es 1,60, calcular la estatura promedio de los varones de dicho grupo.
- a) 1,70 m b) 1,64 m c) 1,71 m
d) 1,69 m e) 1,68 m
18. Juan ha comprado 2,500 cuadernos. 1,000 valen 3 soles cada uno y las restantes valen 2 soles cada uno. El precio promedio, en soles, por cuadernos es:
- a) 2,50 b) 2,70 c) 2,30
d) 2,40 e) 2,60
19. Si el promedio de 10 números de entre los 50 (cincuenta) primeros enteros positivos es 27,5. El promedio de los 40 enteros positivos restantes es:
- a) 20 b) 22 c) 23
d) 24 e) 25
20. El promedio de dos números es 3. Si se duplica el primer número y se quintuplica el segundo número, el nuevo promedio es 9. Los números originales están en la razón:
- a) 3 : 1 b) 3 : 2 c) 4 : 3
d) 5 : 2 e) 2 : 1
21. El promedio geométrico de 5 números es 2^{12} y el promedio geométrico de 3 de ellos es 2^6 . ¿Cuál será el promedio geométrico de los otros 2?
- a) 2^6 b) 2^4 c) 2^{64}
d) 2^{42} e) 2^{21}
22. La media aritmética de $\overline{ab}$ y $\overline{ba}$ es 66, si se cumple $a^2 + b^2 = 90$. Hallar la media geométrica de "a" y "b"
- a) $3\sqrt{2}$ b) $3\sqrt{3}$ c) $3\sqrt{6}$
d) $3\sqrt{7}$ e) $\sqrt{29}$
23. El promedio de 5 números es x. Si el promedio de dos de ellos es $\frac{x}{2}$, ¿Cuál es el promedio de los otros tres?
- a) $\frac{4x}{3}$ b) $\frac{x}{3}$ c) $\frac{3x}{4}$
d) $\frac{(x-3)}{4}$ e) $\frac{(x-4)}{3}$
24. El promedio de 50 números es 38 siendo 38 y 62 dos de los números. Eliminando estos números el promedio de los restantes es:
- a) 36,5 b) 38 c) 37,2
d) 38 e) 37,5
25. En una oficina trabajan 12 personas cuyo promedio de edades es 26 años. Si el número de hombres es 8 y su edad promedio es 28 años. ¿Cuál es la edad promedio de la edad de las mujeres?
- a) 27 b) 26 c) 25
d) 24 e) 22
26. Si la media geométrica de dos números es 14 y su media armónica $11\frac{1}{5}$, halla los números. Dar la suma de cifras del mayor.
- a) 3 b) 10 c) 13
d) 5 e) 6
27. Un estudiante TRILCE sale a correr todos los días en un circuito de forma cuadrada con las siguientes velocidades; 4 m/s; 6 m/s; 10 m/s y V m/s. Si la velocidad promedio es $\frac{48}{7}$. Halle: V
- a) 12 b) 20 c) 15
d) 18 e) 24

28. Si la media aritmética de los "n" primeros números naturales (1, 2, 3, ..., n) es a.
¿Cuál es la media aritmética de:
(a+1, a+2, a+3, ..., a+n)?
- a) $n + 1$ b) $\frac{n+1}{4}$ c) $\frac{a+n}{2}$
d) $\frac{n+1}{2}a$ e) $n - 1$
29. La MG de tres números enteros es $5\sqrt[3]{18}$. Si la MA de dos de ellos es 12,5.
Hallar la MA de los tres números.
- a) 15,1 b) 12,3 c) 11,6
d) 14,2 e) 13,3
30. Si la media aritmética y la media geométrica de dos números enteros positivos x e y son enteros consecutivos, entonces el valor absoluto de $\sqrt{x} - \sqrt{y}$ es:
- a) $\sqrt{2}$ b) 2 c) 1
d) $3\sqrt{2}$ e) $\sqrt{3}$
31. La media aritmética de 15 impares de 2 cifras es 35 y de otros 20 impares, también de 2 cifras, es 52.
Hallar la media aritmética de los impares de 2 cifras no considerados.
- a) 71 b) 81 c) 91
d) 46 e) 54
32. La media aritmética de los términos de una proporción geométrica continua es a la razón aritmética de sus extremos como 3 a 4.
Calcular la suma de las 2 razones geométricas que se pueden obtener con los extremos de dicha proporción.
- a) 6,25 b) 5 c) 4,25
d) 3,75 e) 2,75
33. Tres números enteros a, b y c, tienen una media aritmética de 5 y una media geométrica de $\sqrt[3]{120}$.
Además, se sabe que el producto $bc = 30$.
La media armónica de estos números es:
- a) $\frac{320}{73}$ b) $\frac{350}{75}$ c) $\frac{360}{74}$
d) $\frac{75}{350}$ e) $\frac{73}{360}$
34. El promedio armónico de las edades de 8 hermanos es 30.
Ninguno de ellos es menor de 28 años.
¿Cuál es la máxima edad que podría tener uno de ellos?
- a) 30 años b) 40 años c) 60 años
d) 90 años e) 50 años
35. La $\overline{MA}$ de 19 números consecutivos es 15 y la $\overline{MA}$ de otros 12 números impares consecutivos es 38.
Si la $\overline{MA}$ del menor y mayor de estos 31 números es de la forma : $\overline{ab,c}$
Hallar: $a + b + c$
- a) 10 b) 12 c) 14
d) 16 e) 20
36. En una pista circular, un automóvil se desplaza a velocidades de:
2; 6; 12; 20; ... ; 380 Km/h.
La velocidad promedio del automóvil es:
- a) $\frac{18}{19^2}$ b) 19 c) 20
d) $\frac{21^2}{20}$ e) $\frac{20}{21^2}$
37. Al calcular la M.A. de todos los números de dos cifras PESI con 5, se comete un error de dos unidades por no considerar a los números M y N (ambos impares).
¿Cuántas parejas M y N existen?
- a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8
38. Determinar el promedio armónico de los números de la siguiente sucesión:
40; 88; 154; 238; ; 1804; 2068
- a) 215 b) 220 c) 240
d) 235 e) 245
39. Si para dos números a y b ($a > b$) que son enteros positivos:
 $MA^{MG} = 3125^6$
Determinar la media armónica.
- a) 7 b) 8 c) 9
d) 10 e) 11
40. Sean a y b dos números enteros pares, si el producto de la MA con su MH es igual a cuatro veces su MG, entonces el menor valor que toma uno de dichos números es:
- a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e) 10

41. Un auto viaja de la siguiente manera: recorre 200 Km a 30 Km/h; luego, 100 Km a 40 Km/h y finalmente, 300 Km a 60 Km/h.
¿Cuál es la velocidad media de todo su recorrido?
- a) $42\frac{6}{17}$ b) $51\frac{2}{17}$ c) $52\frac{3}{19}$
d) $55\frac{2}{19}$ e) $47\frac{2}{19}$
42. En el Dpto. de Matemáticas de la UNI, trabajan matemáticos, ingenieros mecánicos e ingenieros civiles. "La suma de las edades de todos ellos es 2880 y la edad promedio es 36 años". Las edades promedios de los matemáticos, mecánicos y civiles son respectivamente : 30, 34 y 39 años. Si cada matemático tuviera 2 años más; cada mecánico, 6 años más y cada civil, 3 años más, entonces la edad promedio aumentaría en 4 años.
Hallar el número de matemáticos, que trabajan en el Dpto. de Matemáticas.
- a) 40 b) 10 c) 30
d) 20 e) 15
43. ¿Cuántos pares de números enteros diferentes cumplen que el producto de su media aritmética, media geométrica y la media armónica es 250047?
- a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7
44. La media armónica de un grupo de números consecutivos es 24. A cada uno de estos números se les multiplica por su siguiente consecutivo y nuevamente se calcula su promedio armónico y se obtiene 28.
Halle la media armónica de los consecutivos a cada uno de los números del primer grupo.
- a) 52 b) 62 c) 162
d) 168 e) 74
45. Calcule la media aritmética de las siguientes cantidades:
 $1; 4; 12; 32; \dots; \frac{n \cdot 2^n}{2}$
- a) $\frac{2^n(n-2)+1}{3}$ b) $\frac{2^n(n-1)+1}{n}$
c) $\frac{2n(n-2)+1}{n}$ d) $\frac{2^n+1}{n+1}$
e) $\frac{2^n(n+1)-1}{n}$
46. A excede a B en $\sqrt{2n}$ unidades. Los promedios aritmético y geométrico de A y B son números impares consecutivos.
Calcule B.
- a) 25 b) 49 c) 32
d) 18 e) 28
47. Se tiene 100 números, donde el promedio aritmético de 40 de ellos es p y el promedio aritmético de los otros 60 números es q. Si la media geométrica y la media armónica de p y q son $10\sqrt{2}$ y $\frac{40}{3}$ respectivamente.
¿Cuál es el mayor valor que puede tomar el promedio aritmético de los 100 números?
- a) 14 b) 16 c) 18
d) 24 e) 17
48. Calcular el promedio geométrico de:
 $1; 6; 27; 108; 405; \dots$ ("n" términos)
(Considere : $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot K = K!$)
- a) $3^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sqrt[n+1]{n!}$ b) $3^n \cdot \sqrt[n]{n!}$
c) $2^{\frac{n+1}{2}} \cdot \left(\sqrt[n]{n!}\right)^{-1}$ d) $3^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sqrt[n]{n!}$
e) $3^{\frac{n+1}{2}} \cdot \sqrt[n]{(n+1)!}$
49. La M.H. de un grupo de números consecutivos es "a", a cada uno de estos números se le multiplica por su siguiente consecutivo y nuevamente se calcula en M.H. y se obtiene "b".
Hallar la M.H. de los consecutivos de cada uno de los números del grupo mencionado.
- a) $\frac{a \cdot b}{a+b}$ b) $\frac{a-b}{a \cdot b}$ c) $\frac{a+b}{a \cdot b}$
d) $\frac{a \cdot b}{b-a}$ e) $\frac{2ab}{a+b}$
50. Sabiendo que 2 números diferentes cumplen con la siguiente condición:
 $(\sqrt{MA})^{MG} = 3125^4$
Hallar la diferencia de los números.
- a) 20 b) 40 c) 35
d) 30 e) 25

51. Calcular el mayor promedio de:
1.2; 1.2.3; 2.3.4; 3.4; 3.4.5; ...; $n(n+1)$; $n(n+1)(n+2)$

- a) $\frac{n(n+1)(n+2)}{(n+3)}$
b) $\frac{(n+1)(n+2)}{3}$
c) $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{8}$
d) $\frac{(n+1)(n+2)(3n+13)}{24}$
e) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{(n+4)}$

52. Hallar el promedio de todos los numerales capicúas de 3 cifras cuyas bases son menores que 10.

- a) 247,5 b) 240 c) 324
d) 120 e) 200

53. Entre los enteros positivos que son menores que J.
¿Cuál es el mayor?

$$J = \frac{\sqrt{56}}{15} + \frac{\sqrt{72}}{17} + \frac{\sqrt{90}}{19} + \dots + \frac{\sqrt{2756}}{105}$$

- a) 18 b) 17 c) 29
d) 23 e) 22

54. Una balanza, mal construida, a pesar de tener los brazos algo desiguales, se encuentra en equilibrio cuando se halla descargada. Se pesa un cuerpo en el platillo derecho y arroja un peso de "a" gramos y cuando se pesa el mismo cuerpo en el platillo izquierdo acusa un peso de "b" gramos.
Calcular el verdadero peso del cuerpo.

M.A. = Media Aritmética.
M. G. = Media Geométrica.
M. H. = Media Armónica.

- a) MA (a y b)
b) MH (a y b)
c) MG (a y b)
d) $\frac{1}{2} MG^2$ (a y b)
e) $\frac{1}{2} MH$ (a y b)

55. Las medias aritmética, geométrica y armónica de dos enteros positivos cumplen que:

$$MA \left(\frac{2}{MG} \right)^{-1} = 256\sqrt{15}$$

Calcular la diferencia entre los números.

- a) 6 b) 7 c) 8
d) 9 e) 10

56. Una hormiga recorre los "n" lados de un polígono, una sola vez cada lado, con velocidades de 2, 14, 35, 65, 104, 152, ... y 527 centímetros por cada minuto, respectivamente.

Si calculamos la velocidad promedio, considerando que es un polígono regular, el resultado será "p" cm/min.

En cambio, si consideramos que cada lado lo recorre en el mismo tiempo, el resultado será "q" cm/min.

Si: $n + p + q = MA(a; b) \times MH(a; b)$

Calcule la suma de los valores de "a + b", si son enteros positivos.

- a) 448 b) 906 c) 360
d) 418 e) 936

57. Sean a, b y c enteros positivos. Si las medias geométricas de ab, ac y bc son directamente proporcionales a los números 3, 4 y 5 respectivamente.

Encontrar el valor de la constante de proporcionalidad que hace que los números a, b y c sean los menores posibles.

- a) 1 b) 20 c) 120
d) 60 e) 180

58. Hallar la media armónica de la siguiente serie: 1; 2; 4; 8; ...; ("n" términos)

Dar como respuesta la suma del numerador y denominador de la fracción resultante.

- a) 2^n b) $2^n - 1$
c) $2^n(n+1)$ d) $2^n(n+1) - 1$
e) $2^{n-1}(n+2) - 1$

59. Para 2 números se cumple:

$$\frac{1}{4} \left[\frac{1}{MA} + \frac{1}{MG} \right] = (MA + MG)^{-1}$$

Hallar:

$$G = \frac{(MA + MG)^2}{8(MA \cdot MG)}$$

- a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{4}$
d) $\frac{2}{5}$ e) 1

60. La media armónica de 3 números es: [10; 1; 2; 2] su media geométrica es igual a uno de ellos que es múltiplo de 5. Al considerar un cuarto número la media armónica es [12; 2].

Hallar la media geométrica de los 4 números.

- a) $2\sqrt{15}$ b) $3\sqrt{15}$ c) $4\sqrt{15}$
d) $5\sqrt{15}$ e) $6\sqrt{15}$

Claves

01.	<i>d</i>
02.	<i>a</i>
03.	<i>b</i>
04.	<i>c</i>
05.	<i>c</i>
06.	<i>e</i>
07.	<i>e</i>
08.	<i>b</i>
09.	<i>c</i>
10.	<i>b</i>
11.	<i>b</i>
12.	<i>c</i>
13.	<i>b</i>
14.	<i>b</i>
15.	<i>b</i>
16.	<i>e</i>
17.	<i>a</i>
18.	<i>d</i>
19.	<i>e</i>
20.	<i>e</i>
21.	<i>e</i>
22.	<i>b</i>
23.	<i>a</i>
24.	<i>e</i>
25.	<i>e</i>
26.	<i>b</i>
27.	<i>c</i>
28.	<i>a</i>
29.	<i>e</i>
30.	<i>a</i>

31.	<i>c</i>
32.	<i>c</i>
33.	<i>c</i>
34.	<i>c</i>
35.	<i>c</i>
36.	<i>c</i>
37.	<i>e</i>
38.	<i>d</i>
39.	<i>c</i>
40.	<i>a</i>
41.	<i>a</i>
42.	<i>b</i>
43.	<i>e</i>
44.	<i>d</i>
45.	<i>b</i>
46.	<i>a</i>
47.	<i>b</i>
48.	<i>d</i>
49.	<i>d</i>
50.	<i>d</i>
51.	<i>d</i>
52.	<i>c</i>
53.	<i>e</i>
54.	<i>c</i>
55.	<i>c</i>
56.	<i>a</i>
57.	<i>d</i>
58.	<i>e</i>
59.	<i>a</i>
60.	<i>d</i>