

MATRICES

Definición :

Una matriz es un arreglo rectangular de elementos dispuestos en filas y columnas.

Para representar a una matriz, se utiliza letras mayúsculas.

Ejemplos :

$$* A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{c} \text{Fila} \\ \longleftrightarrow \\ \text{C} \\ \text{o} \\ \text{l} \\ \text{u} \\ \text{m} \\ \text{n} \\ \text{a} \end{array}$$

$$* B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

Orden de una Matriz

Viene dada por la representación $m \times n$, donde "m" es el número de filas y "n" el número de columnas de la matriz. Para los ejemplos citados anteriormente, tenemos :

* A es una matriz de orden 2×3

* B es una matriz de orden 3×3

Forma General de una Matriz de "m" filas y "n" Columnas :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & & & & a_{3n} \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}$$

Donde : a_{ij} es el elemento genérico, ubicado en la fila "i", columna "j".

En forma abreviada se tendrá :

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, 3, \dots, m = \overline{1; m} \\ j = 1, 2, 3, \dots, n = \overline{1; n} \end{array}$$

Matrices Especiales

1. M. Fila :

Es aquella matriz que tiene una sola fila.

$$* [1 \quad 5 \quad 7 \quad 10]$$

2. M. Columna :

Es aquella matriz que tiene una sola columna.

$$* A = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix}$$

3. M. Rectangular :

Es aquella matriz, donde el número de filas y el número de columnas son diferentes.

$$* A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

4. M. Cuadrada :

Es aquella matriz, donde el número de filas y el número de columnas son iguales.

$$* A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 7 \end{bmatrix}$$

5. M. Nula :

Es aquella matriz, donde todos sus elementos son iguales a cero.

$$* A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$* A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Igualdad de Matrices :

Dadas las Matrices :

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \wedge B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

si estas son iguales, es decir : $A = B$, se verifican simultáneamente las condiciones :

- I. A y B son de igual orden : $m \times n$.
 II. Los elementos correspondientes son iguales :
 $a_{ij} = b_{ij}; \forall i, j$

Operaciones con Matrices

- I. **Adición** : Dadas las matrices de igual orden

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \wedge B = [b_{ij}]_{m \times n}$$

se define :

$$A + B = [a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

- * Hallar la matriz A + B, a partir de :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} (2+1) & (1+2) & (3+5) \\ (0-1) & (-1+4) & (2+3) \end{bmatrix}$$

$$\therefore A + B = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 8 \\ -1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

II. Multiplicación :

- II.1 Multiplicación de un escalar por una matriz.

Sean : $A = [a_{ij}]_{m \times n} \wedge k \in \mathbb{R}$, se define:

$$K.A = K.[a_{ij}]_{m \times n} = [K.a_{ij}]_{m \times n}$$

- * Multipliquemos por 2 a la matriz.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 2.A = 2 \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\therefore 2A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 8 \\ -2 & 6 & 4 \end{bmatrix}$$

- II.2 Multiplicación de una matriz fila por una matriz columna.

Sean : $A = [a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \dots a_{1n}]$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{bmatrix}$$

se define :

$$A.B = [a_{11}.b_{11} + a_{12}.b_{21} + a_{13}.b_{31} + \dots + a_{1n}.b_{n1}]$$

- * Multipliquemos A por B, donde :

$$A = [2 \ 1 \ 3] \wedge B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A.B = [2 \ 1 \ 3] \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = [(2).(2) + (1).(4) + (3).(6)]$$

$$A \cdot B = [4 + 4 + 18] \therefore A \cdot B = [26]$$

III.3 Multiplicación de las Matrices

Dadas las matrices A y B, existe el producto matricial de A por B denotado por A.B, si se verifica lo siguiente :

$$\# \text{ de columnas de A} = \# \text{ de filas de B}$$

luego :

$$A_{m \times p} \cdot B_{p \times n} = C_{m \times n}$$

- * Veamos un ejemplo :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \wedge B = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

¿Existe A . B?, veamos :

A tiene orden $2 \times 2 \rightarrow \# \text{ col} = 2$

B tiene orden $2 \times 3 \rightarrow \# \text{ fil} = 2$

como : $\# \text{ col de A} = \# \text{ fil de B}$ se afirma que si existe A . B, cuyo orden es de 2×3 .

$$A.B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Ahora se multiplica de forma similar que el caso (II.2).

$$A.B = \begin{bmatrix} (2).(2) + (-1).(1) & (2).(-2) + (-1).(2) & (2)(5) + (-1)(-3) \\ (3).(2) + (1)(1) & (3)(-2) + (1).(2) & (3)(5) + (1)(3) \end{bmatrix}$$

$$A.B = \begin{bmatrix} 4-1 & -4-2 & 10+3 \\ 6+1 & -6+2 & 15-3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore A.B = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 13 \\ 7 & -4 & 12 \end{bmatrix}$$

¿Existe B.A?, veamos :

$\# \text{ col de B} = 3$ y $\# \text{ fil de A} = 2$ como $\# \text{ col de B} \neq \# \text{ fil de A}$, se podrá afirmar que B.A no existe.

En General : El producto matricial no es conmutativo.

Teoremas :

Sean A, B y C matrices para las cuales se define la adición y/o multiplicación, además al escalar "k".

1. $K \cdot (A+B) = K \cdot A + K \cdot B$
2. $A + B = B + A$
3. $A \cdot B \cdot C = (A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
4. $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C$
5. $A \cdot B = 0$ no implica $A = 0 \vee B = 0$
6. $A \cdot B = A \cdot C$ no implica $B = C$

Propiedades :

Sean las matrices A y B, de modo que existen A.B y B.A.

1. Si : $A \cdot B = B \cdot A$, se dice que A y B son matrices conmutables.
2. Si : $A \cdot B = -B \cdot A$ se dice a A y B son matrices anticonmutables.

III. Potenciación :

Siendo A una matriz cuadrada y "n" un entero positivo, se define :

$$A^n = \begin{cases} A & ; n = 1 \\ \underbrace{A \cdot A \cdot A \cdot \dots \cdot A}_{\text{"n" veces}} & ; n \geq 2 \end{cases}$$

* Hallar A^2 , si : $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} (2) \cdot (2) + (-1) \cdot (3) & (2) \cdot (-1) + (-1) \cdot (1) \\ (3) \cdot (2) + (1) \cdot (3) & (3) \cdot (-1) + (1) \cdot (1) \end{bmatrix}$$

$$A^2 = \begin{bmatrix} 4-3 & -2-1 \\ 6+3 & -3+1 \end{bmatrix} \therefore A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 9 & -2 \end{bmatrix}$$

Transpuesta de una Matriz

Dada una matriz A, existe su matriz transpuesta denotada por A^T y definida como aquella matriz que se obtiene al transformar todas las filas de A en columnas.

$$A = [a_{ij}]_{m \times n} \Rightarrow A^T = [a_{ji}]_{n \times m}$$

* Veamos un ejemplo :

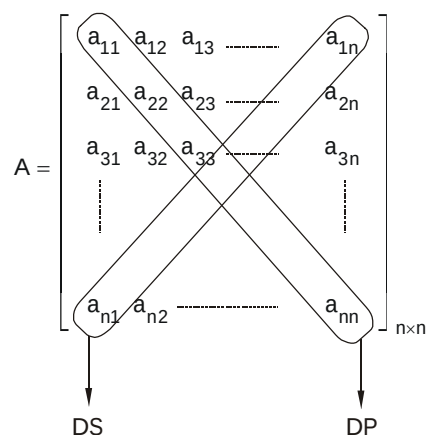
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

Propiedades :

Siendo A y B matrices, y el escalar "K".

1. $(A+B)^T = A^T + B^T$
2. $(K \cdot A)^T = K \cdot A^T$
3. $(A^T)^T = A$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Estudio de las Matrices Cuadradas



Observaciones :

1. Toda matriz cuadrada de "n" filas y "n" columnas es de orden "n".
2. La diagonal trazada de izquierda a derecha recibe el nombre de **Diagonal Principal** (D.P.).
3. La diagonal trazada de derecha a izquierda recibe el nombre de **Diagonal Secundaria** (D.S.).

Traza de A (Traz(A))

Se denomina así, a la suma de todos los elementos de la diagonal principal.

$$\text{Traz}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33} + \dots + a_{nn}$$

* Para la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 8 & 7 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix}$$

D.P.

$$\text{Traz}(A) = (2) + (8) + (-4)$$

$$\therefore \text{Traz}(A) = 6$$

Propiedades :

Siendo A y B matrices y el escalar "K".

1. $\text{Traz}(A+B) = \text{Traz}(A) + \text{Traz}(B)$
2. $\text{Traz}(K \cdot A) = K \cdot \text{Traz}(A)$
3. $\text{Traz}(A \cdot B) = \text{Traz}(B \cdot A)$

Matrices Cuadradas Especiales

1. **M. Diagonal** : Es aquella matriz no nula, donde todos los elementos fuera de la diagonal principal son ceros.

Ejemplos :

$$* A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$* B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. **M. Escalar** : Es aquella matriz diagonal donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Ejemplo :

$$* A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

3. **M. Identidad (I)** : Es aquella matriz escalar donde todos los elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad.

Ejemplo :

$$* I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4. **M. triangular Superior** : Es aquella matriz donde solamente todos los elementos ubicados debajo de la diagonal principal son ceros.

Ejemplo :

$$* A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

5. **M. Triangular Inferior** : Es aquella matriz donde solamente todos los elementos ubicados encima de la diagonal principal son ceros.

Ejemplo :

$$* A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

Características Notables de algunas Matrices Cuadradas :

1. **Matriz Simétrica** : Si A es una matriz simétrica, verifica :

$$A^T = A$$

2. **Matriz Antisimétrica** : Si A es una matriz antisimétrica, verifica :

$$A^T = -A$$

3. **Matriz Idempotente** : Si A es una matriz idempotente, verifica :

$$A^2 = A$$

4. **Matriz Involutiva** : Si A es una matriz involutiva, verifica :

$$A^2 = I; \text{ (matriz identidad)}$$

5. **Matriz Nilpotente** : Si A es una matriz nilpotente, verifica :

$$A^p = 0; \text{ (matriz nula)}$$

p : índice de nilpotencia.

DETERMINANTES

Definición :

Un determinante es la relación funcional que aplicada a una matriz cuadrada la transforma en un escalar (número real).

Si A es una matriz cuadrada, su determinante se denota así : $\det(A)$ o $|A|$.

Determinante de Orden Uno

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

$$|A| = a \cdot d - b \cdot c$$

Determinante de Orden Tres :

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

Según, la Regla de Sarrus :

$$|A| = M - N$$

Menor Complementario de una Componente

El menor complementario de la componente (elemento) a_{ij} denotado por M_{ij} es el determinante de la matriz que resulta al eliminar la fila "i" y la columna "j" de la matriz dada.

Para :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$$

el menor complementario de $a_{12} = 4$ es :

$$M_{12} = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = (5) \cdot (3) - (1) \cdot (2)$$

$$M_{12} = 15 - 2$$

$$\therefore M_{12} = 13$$

Cofactor de una Componente

El cofactor de la componente (elemento) a_{ij} denotado por A_{ij} , se define de la manera siguiente :

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$$

Para :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

el cofactor de la componente a_{13} es :

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \quad M_{13} = (-1)^4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A_{13} = (1) \cdot [(1) \cdot (3) - (2) \cdot (-1)]$$

$$C_{13} = 3 + 2$$

$$\therefore C_{13} = 5$$

Teorema : El determinante de una matriz será igual a la suma de los productos obtenidos al multiplicar todos los elementos de una fila (o columna) por sus respectivos cofactores.

Para :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

con los elementos de la primera fila :

$$|A| = 2 \cdot \begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (2)(9) - (1)(7) + (-3)(-13)$$

$$|A| = 18 - 7 + 39$$

$$\therefore |A| = 50$$

Observación :

Para aplicar el teorema anterior, se recomienda escoger la fila (o columnas) que presente más ceros.

Propiedades :

Dadas las matrices cuadradas A y B, y el escalar "K".

1. $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$
2. $|A^T| = |A|$
3. $|K \cdot A| = K^n \cdot |A|$; "n" orden de A.
4. Si dos filas (o columnas) son proporcionales, el determinante será igual a cero.
5. Si todos los elementos de una fila (o columna) son ceros, el determinante será igual a cero.
6. Si se permutan dos filas (o columnas) consecutivas, el determinante cambia de signo.
7. El determinante no varía si a todos los elementos de una fila (o columna) se les aumenta un múltiplo de otra.
8. El determinante de una matriz triangular superior, triangular inferior y diagonal se obtiene multiplicando todos los elementos de la diagonal principal.

Determinante de Vandermonde

1. De orden dos :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a & b \end{vmatrix} = b - a$$

2. De orden tres :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)$$

3. De orden cuatro :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix} = (d-c)(d-b)(d-a)(c-b)(c-a)(b-a)$$

Definición :

Una matriz cuadrada A es no singular, si :
 $|A| \neq 0$, asimismo, si : $|A| = 0$, la matriz A será singular.

MATRIZ INVERSA

Dada una matriz cuadrada no singular A, si existe una única matriz B cuadrada del mismo orden, tal que :
 $A \cdot B = B \cdot A = I$ (matriz identidad), entonces, definimos B como matriz inversa de A y lo denotamos por A^{-1} .

Teorema : Una matriz cuadrada tiene inversa, si y sólo si, es una matriz no singular; en tal caso se dice que la matriz es inversible.

Propiedades :

Sean A y B matrices cuadradas no singulares y el escalar "K".

1. $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$
2. $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$
3. $(A^{-1})^{-1} = A$
4. $(K \cdot A)^{-1} = K^{-1} \cdot A^{-1}$
5. $|A^{-1}| = |A|^{-1} = \frac{1}{|A|}$

Cálculo de Matrices Inversas

1. De orden uno

$$A = [a] \rightarrow A^{-1} = \left[\frac{1}{a}\right]; a \neq 0$$

2. De orden dos

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Observación :

Para matrices de orden mayores o iguales a tres se recomienda utilizar el método de Gauss-Jordan, el cual consiste en construir una matriz ampliada (A : I) donde por operaciones elementales debemos encontrar otra matriz ampliada (I : B), con lo cual se podrá afirmar que B es la inversa de A, es decir : $B = A^{-1}$.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Escribir explícitamente la matriz "A".

$$A = [A_{ij}]_{2 \times 3} / \begin{matrix} a_{ij} = ij; i = j \\ a_{ij} = i + j; i \neq j \end{matrix}$$

$$a) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

02. Dada la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} 4x+9y & 5x \\ 18 & x-2y \end{bmatrix}$$

donde se cumple :

$$a_{12} = 2 + a_{21}$$

$$a_{22} = 0$$

Calcular : $x + y$.

- a) 5 b) 9 c) 8
d) 7 e) 6

03. Si :

$$\begin{bmatrix} m+n & 2p+q \\ m-n & p-q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

Hallar : $(m - p) + (2n - q)$.

- a) 4 b) -3 c) 2
d) 3 e) -2

04. Dada la matriz :

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular : $3B^T + I$.

$$a) \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 15 & 13 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 13 & 15 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 16 & 5 \\ 9 & 2 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 18 & 15 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$$

05. Dados :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \quad y \quad B = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si :

$$P(x,y) = 3x - 2y + 2$$

Hallar : $P(A; B)$.

$$a) \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} -7 & -7 \\ 3 & 9 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 9 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

06. Dados :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hallar : $A \times B$.

$$a) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$$

07. Dada la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular : $A^2 - A$.

$$a) \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \quad b) \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad c) \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$d) \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \quad e) \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

08. Hallar la suma de los elementos de "x", tal que :

$$x \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

- a) -2 b) 0 c) 1
d) 3 e) 5

09. Hallar la matriz inversa de :

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Señalar la traza de dicha matriz inversa.

- a) 5 b) 1 c) 2
d) 10 e) 9

10. Luego de resolver la siguiente ecuación :

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 8 & 1 \\ 1 & x \end{vmatrix} = 28$$

indicar su solución :

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

11. Se define la siguiente regla :

$$P(a, b, c) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

A partir de ella, calcular : $P(-2, 0, 1)$.

- a) 16 b) 19 c) 20
d) 21 e) 22

12. Luego de resolver la siguiente ecuación :

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 2 & x \end{vmatrix} + x \begin{vmatrix} x \\ 3 \end{vmatrix} = 0$$

Indicar la suma de cuadrados de las soluciones.

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

13. Si : $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$

Hallar el valor de :

$$\begin{vmatrix} 2+a & b \\ 2+c & d \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & d \\ 1 & b \end{vmatrix}$$

- a) -2 b) -1 c) 0
d) 1 e) 2

14. Dada la ecuación :

$$\begin{vmatrix} x & 2 & 1 \\ 3 & y & -1 \\ 0 & 2 & z \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & 1 & 2 \\ 0 & y & 3 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} = 0$$

se pide calcular el valor numérico de : $\frac{x}{z-1}$.

- a) 2 b) 4 c) 3
d) 5 e) 11

15. Dadas las matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{Hallar : } \frac{|A \cdot B|}{|B| \cdot |A|}$$

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

16. Hallar el valor de :

$$E = \sqrt{\begin{vmatrix} a & b & a \\ 1 & 1 & 1 \\ b & 0 & a \end{vmatrix}}$$

- a) $a + b$ b) $a - b$ c) ab
d) $ab - 1$ e) $a^2 + b^2$

17. " α " y " β " son las raíces de la ecuación :

$$x^2 - 4x + 31 = 0$$

Calcular el determinante de :

$$\begin{bmatrix} \alpha + \beta & \alpha + \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix}$$

- a) 4 b) 9 c) 16
d) 25 e) 36

18. Luego de resolver la siguiente ecuación :

$$\begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 5 & x & -1 \\ 8 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -2 & x \end{vmatrix} = 0$$

Indicar el producto de soluciones.

- a) 5 b) -5 c) 6
d) 3 e) -7

19. Si se sabe :

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & b & c \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

Además : $a + b + c = 18$.

Calcular :

$$\begin{vmatrix} a+c & b \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

- a) 6 b) 13 c) -6
d) 12 e) 18

20. Si : $\alpha; \beta$ y θ son las raíces de la ecuación :

$$x^3 + 5x + 3 = 0$$

Calcular el determinante de :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \theta \\ \beta & \theta & \alpha \\ \theta & \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

- a) 0 b) 1 c) -1
d) 4 e) 7

21. Construir la matriz :

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 2} / a_{ij} = i + 3j$$

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 1 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{c) } \begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 5 & 8 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\text{d) } \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e) } \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 6 & 7 \\ 8 & 9 \end{bmatrix}$$

22. Sea la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} x-2y & x+3y & 2x \\ 3y-x & x+y & 2x-y \\ 9 & 8 & 7 \end{bmatrix}$$

donde se cumple :

$$\text{TRAZ}(A) = 16 \wedge a_{21} + a_{31} = a_{22} + 1.$$

Calcular : "x.y".

$$\text{a) } 6 \quad \text{b) } 4 \quad \text{c) } 5 \\ \text{d) } 3 \quad \text{e) } 7$$

23. Si en la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} 2x-3y & 4x \\ 2x+12 & y+6 \end{bmatrix}$$

Se cumple : $a_{21} = a_{12}$ y $\text{TRAZ}(A) = 6$.Calcular : $\frac{x.y}{x+y}$.

$$\text{a) } 4 \quad \text{b) } \frac{4}{3} \quad \text{c) } 3 \\ \text{d) } 2 \quad \text{e) } \frac{1}{2}$$

24. Sean las matrices :

$$A = \begin{bmatrix} x-2y & x \\ 3 & x-y \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & y+4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

Hallar : "x.y", si : $A = B$.

$$\text{a) } 6 \quad \text{b) } 10 \quad \text{c) } 8 \\ \text{d) } 12 \quad \text{e) } 14$$

25. Sean las matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } B = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hallar : $3A - 4B$.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 24 & -32 \\ -8 & 12 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 4 & -16 \\ 5 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 0 & -14 \\ -8 & -24 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ -9 & 10 \end{bmatrix}$$

$$\text{e) } \begin{bmatrix} 0 & -22 \\ -13 & -5 \end{bmatrix}$$

26. Dada la matriz :
- $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\text{Además : } P(x) = x^2 - 5x + 2I.$$

Dar la suma de elementos de $P(A)$:

$$\text{a) } 8 \quad \text{b) } -6 \quad \text{c) } -4 \\ \text{d) } 6 \quad \text{e) } -8$$

27. Sean las matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Hallar : $A.B$.

$$\text{a) } \begin{bmatrix} 14 & -1 & 12 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{b) } \begin{bmatrix} 11 & 0 & 12 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{bmatrix} 14 & -1 & 10 \\ 9 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{d) } \begin{bmatrix} 14 & -1 & 12 \\ 9 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

e) N.A.

28. Dada la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar la traza de A^2 .

$$\text{a) } 7 \quad \text{b) } 2 \quad \text{c) } 3 \\ \text{d) } 4 \quad \text{e) } 5$$

29. Hallar la matriz "x", que cumpla:

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Indicar : $\text{TRAZ}(X)$.

$$\text{a) } 2 \quad \text{b) } 5 \quad \text{c) } -17 \\ \text{d) } 10 \quad \text{e) } -2$$

30. Hallar la matriz inversa de :

$$A = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 2 & -\frac{1}{2} \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$

31. Se define la siguiente función :

$$F_{(x,y,z)} = \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 0 & 0 \\ 4 & y & 0 \\ 8 & 9 & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & 5 & 7 \\ 0 & y & 5 \\ 0 & 0 & z \end{vmatrix}$$

A partir de ella, calcular : $Q(1, 2, 4)$.

- a) 16 b) 18 c) 24
d) 15 e) 23

32. Sabiendo que :

$$\begin{vmatrix} a & -b \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a & b \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 32$$

Calcular el valor de : $\begin{vmatrix} 4a & b \\ -4 & 1 \end{vmatrix}$

- a) 8 b) 16 c) 32
d) 64 e) 128

33. Resolver la ecuación :

$$\begin{vmatrix} x-1 & x & x \\ x & x+1 & x \\ x & x & x+3 \end{vmatrix} = 0$$

- a) -6 b) -5 c) -4
d) 3 e) -3

34. A partir de la ecuación matricial :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Donde "X" es una matriz cuadrada de orden 2.
Hallar : $\text{Det}(X)$.

- a) 6 b) 7 c) 11
d) 8 e) 19

35. Sea la progresión geométrica :

$\div \div 2 : n_2 : n_3 : n_4 \dots$ cuya razón es k^2 ; se cumple en ella que la suma de los cuatro primeros es igual a 80. ($k \in \mathbb{R}^+$). Además se tiene el siguiente resultado:

$$\begin{vmatrix} a & 1 \\ b & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ak & k \\ bk & 2k \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ak^2 & k^2 \\ bk^2 & 2k^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} ak^3 & k^3 \\ bk^3 & 2k^3 \end{vmatrix} = 120$$

Hallar : $2a - b$.

- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 6

36. Si : $\alpha; \beta$ y θ son las raíces de la ecuación :

$x^3 + 4x + 3 = 0$. Calcular el determinante de :

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta & \theta \\ \beta & \theta & \alpha \\ \theta & \alpha & \beta \end{bmatrix}$$

- a) 0 b) 1 c) -1
d) 4 e) 7

37. Calcular :

$$\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$$

- a) ab b) 1 c) 0
d) 4ab e) 2ab

38. Si : $k \in \mathbb{N}$, obtener " $3k + 5$ ", sabiendo que :

$$\begin{vmatrix} -2 & k-3 & -k \\ 1 & 1 & 2 \\ k-1 & 1 & k+2 \end{vmatrix} = 0$$

- a) 17 b) 29 c) 6
d) 20 e) 4

39. Calcular el $|A|$, si :

$$\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

- a) 3 b) 9 c) 8
d) 25 e) 36

40. Hallar "x" en :

$$\begin{vmatrix} a & a & x \\ m & m & m \\ b & x & b \end{vmatrix} = 0$$

e indicar uno de sus valores.

- a) a b) ab c) 1
d) 1/b e) m

41. Escribir explícitamente la matriz :

$$C = [c_{ij}]_{\varepsilon k^{2 \times 3}} / c_{ij} = \text{Máx}(i, j)$$

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$

42. Sean :

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}, y$$

$$\begin{cases} x + 2y = A \\ x - y = B \end{cases}$$

donde "x" es :

a) $\begin{bmatrix} \frac{4}{3} & \frac{7}{3} \\ 7 & 0 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{5}{2} \\ 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 3 & -\frac{9}{2} \\ \frac{4}{3} & 7 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} \frac{9}{4} & \frac{7}{2} \\ \frac{3}{4} & -1 \end{bmatrix}$

43. Si :

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Hallar : $(x + y + z)$.

a) 11 b) 13 c) 6
d) 7 e) -4

44. Dada la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Hallar la traza de A^2 .

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

45. Hallar la traza de A^{-1} , si :

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) 0
d) $-\frac{1}{2}$ e) 4

46. Sean las matrices :

$$A = \begin{bmatrix} 12 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 21x & 48 \\ 16 & y-1 \end{bmatrix}$$

donde se cumple que : $A^2 = B$.
Hallar : "xy".

a) 200 b) 140 c) 180
d) 130 e) 160

47. Sea la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} x-y & 6 & 9 \\ -1 & 2x-y & 3 \\ 4 & -5 & 2y-x \end{bmatrix}$$

donde se cumple :

$\text{Traz}(A) = a_{13} + a_{21}$. Calcular "x".

a) 6 b) 5 c) 3
d) 4 e) 2

48. Si : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ y $F(x) = x^2 - 3x + 2$.

Hallar la suma de elementos de la diagonal principal de $F(A)$.

a) 2 b) 14 c) 16
d) 18 e) 11

49. Dada la matriz :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Calcular la suma de elementos de " A^n ".

a) $3 \cdot 2^n$ b) $5 \cdot 2^n$ c) $2 \cdot 3^n$
d) 2^n e) $5 \cdot 3^n$

50. Sea :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 \end{bmatrix}; \text{ con : } a, b \text{ y } c, \text{ enteros positivos, se}$$

sabe que la segunda columna de :

$$B = A^2 - A^T \text{ es : } \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Calcular : $a + b + c$.

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 7

51. Sea la matriz :

$$H = \begin{bmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{bmatrix}, \text{ tal que } x > 0 \text{ y } \text{Det}(H) = 4.$$

Luego H^2 es :

a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 16 & -3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$
 d) $\begin{bmatrix} -2 & -6 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$

52. Sea : $B = A^4$, donde : $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 6 & 4 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

Entonces, el determinante de "B" es :

a) 2 b) $2^2 \cdot 10$ c) $2^4 \cdot 10^2$
 d) $2^{16} \cdot 10^8$ e) $2^8 \cdot 10^4$

53. Resolver :

$$\begin{vmatrix} x^2 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & 1 & x^2 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

a) -2 b) -1 c) 0
 d) 1 e) 2

54. Calcular "x" en :

$$\begin{vmatrix} a & -b & 2c \\ -a & 2b & -c \\ 2a & b & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & ab \\ c & a+b \end{vmatrix}$$

a) $\frac{abc}{(a+b)}$ b) $\frac{-abc}{(a-b)}$ c) $\frac{-5abc}{(a+b)}$
 d) $\frac{5abc}{(a+b)}$ e) $\frac{3abc}{(a+b)}$

55. Dada una matriz cuadrada "A", se denomina "valores propios de la matriz A", a los números "x" que satisfacen la ecuación : $|A - xI| = 0$.

Hallar los valores propios de la matriz "A", si :

Además :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Además : I $\rightarrow$ matriz identidad.

a) 2; -2; 4 b) 3; 2; 1 c) 4; 5; 1
 d) 1; 0; -1 e) 3; 2; -2

56. Si : " α " es raíz de la ecuación :

$$x^3 - 1 = 0$$

Hallar el valor de :

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2 \\ \alpha & \alpha^2 & 1 \\ \alpha^2 & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

a) α b) 4 c) 3
 d) α^2 e) 0

57. Hallar "x", a partir de :

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 7 & 3 & x \\ 4 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 9$$

a) 1 b) 3 c) 5
 d) 7 e) 9

58. Si : $F(x) = x^2 - 5x + 3$.

Encontrar el determinante de $F_{(B-I)}$, donde :

$$B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

a) 4 b) 2 c) 1
 d) 5 e) 0

59. Resolver :

$$\begin{vmatrix} 3 & x & -x \\ 2 & -1 & 3 \\ x+10 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

a) $-2 \pm \sqrt{22}$ b) ± 4
 c) $-4 \pm \sqrt{22}$ d) $-2 \pm \sqrt{11}$
 e) $\pm \sqrt{11}$

60. Sea "A" una matriz definida por :

$$A = \begin{bmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{bmatrix}$$

Si : $a+b+c = 3$, entonces el valor del $\det(A)$ es :

a) 27 b) 9 c) 0
 d) -9 e) -27

Claves

01.	<i>b</i>
02.	<i>e</i>
03.	<i>c</i>
04.	<i>c</i>
05.	<i>d</i>
06.	<i>c</i>
07.	<i>d</i>
08.	<i>e</i>
09.	<i>a</i>
10.	<i>a</i>
11.	<i>a</i>
12.	<i>e</i>
13.	<i>e</i>
14.	<i>c</i>
15.	<i>d</i>
16.	<i>b</i>
17.	<i>c</i>
18.	<i>c</i>
19.	<i>c</i>
20.	<i>a</i>
21.	<i>c</i>
22.	<i>c</i>
23.	<i>c</i>
24.	<i>d</i>
25.	<i>e</i>
26.	<i>e</i>
27.	<i>a</i>
28.	<i>a</i>
29.	<i>d</i>
30.	<i>e</i>

31.	<i>c</i>
32.	<i>b</i>
33.	<i>e</i>
34.	<i>d</i>
35.	<i>c</i>
36.	<i>a</i>
37.	<i>d</i>
38.	<i>a</i>
39.	<i>c</i>
40.	<i>a</i>
41.	<i>b</i>
42.	<i>a</i>
43.	<i>c</i>
44.	<i>a</i>
45.	<i>e</i>
46.	<i>b</i>
47.	<i>d</i>
48.	<i>c</i>
49.	<i>c</i>
50.	<i>d</i>
51.	<i>d</i>
52.	<i>e</i>
53.	<i>d</i>
54.	<i>c</i>
55.	<i>e</i>
56.	<i>e</i>
57.	<i>b</i>
58.	<i>e</i>
59.	<i>c</i>
60.	<i>e</i>

