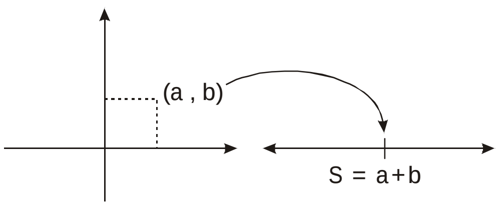
Capítulo 14 CUATRO OPERACIONES EN EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS ENTEROS

INTRODUCCIÓN

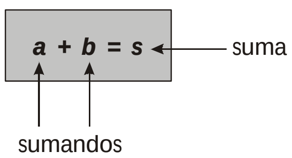
Definimos adición y multilicación de los números enteros no negativos de tal manera que las propiedades de cada uno como operación binaria sean más admisibles.
Una vez establecidas, las llamaremos leyes, porque nos guían en lo que podemos y no podemos hacer en Aritmética, veremos como estas leyes nos permiten ahorrar trabajo en los cálculos, como nos ayudan a encontrar y a entender procedimientos abreviados, así como a dar sentido a muchas de las cosas que antes aprendimos mecánicamente.

ADICIÓN

La adición en Z, que utiliza el operador $+$, es la operación mediante la cual se asigna a dos números enteros ***a*** y ***b*** denominados términos o sumandos un único número entero ***s***, llamado suma de ***a*** y ***b***.



OPERACION : Adición
OPERADOR : +



AXIOMAS PARA LA ADICIÓN

Clausura : La suma de dos números enteros es también un número entero.

Conmutativa : Al cambiar el orden de los sumandos, la suma no se altera.

Asociativa : La suma de tres o más números enteros no varía al agrupar los sumandos de dos en dos.

Elemento neutro (identidad aditiva) : El único elemento del conjunto de números enteros que sumado con otro número entero ***a*** da como resultado el mismo número ***a*** es 0.

Opuesto o inverso aditivo : Para cada número entero ***a***, existe un único número entero – ***a*** tal que : $a + (-a) = 0$

Sumas Notables :

i) $1+2+3+...+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$

ii) $1^2+2^2+3^2+...+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

iii) $1^3+2^3+3^3+...+n^3=\left[\dfrac{n(n+1)}{2}\right]^2$

iv) $1\times2+2\times3+3\times4+...+n(n+1)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$

v) $\dfrac{1}{1\times2}+\dfrac{1}{2\times3}+\dfrac{1}{3\times4}+...+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$

vi) $1+a+a^2+a^3+...+a^n=\dfrac{a^{n+1}-1}{a-1}$

Ejercicios :

* Demuestre cada una de las fórmulas anteriores.

* Se conoce que $e=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, demuestre que ***e*** se puede obtener sumando los siguientes números.

$$\frac{1}{0!};\ \frac{1}{1!};\ \frac{1}{2!};\ \frac{1}{3!};\ \frac{1}{4!};\ \frac{1}{5!};\ \frac{1}{6!};\ .....$$

Suma de términos de una progresión aritmética

$$\boxed{S=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\cdot n}$$

SUSTRACCIÓN

La sustracción en Z, que utiliza el operador –, es la operación inversa de la adición mediante la cual se asigna a dos números enteros ***M*** y ***S*** denominados minuendo y sustraendo respectivamente un único entero ***D*** denominado diferencia.

OPERACIÓN : Sustracción
OPERADOR : –

$$\boxed{M - S = D}$$

Diferencia
Minuendo
Sustraendo

PROPIEDAD : La suma de los tres términos de una sustracción es igual al doble del minuendo.

$$\boxed{M + S + D = 2M}$$

PROPIEDAD :

Si a > c y además :

$$\begin{array}{r} \overline{abc}_{(n)} \; - \\ \overline{cba}_{(n)} \\ \hline \overline{xyz}_{(n)} \end{array}$$

Se cumple que : x + z = y = n – 1
a – c = x + 1

¿Podría demostrar esta propiedad?

COMPLEMENTO ARITMÉTICO

Sea N un numeral de k cifras de la base B

$$\boxed{CAN_{(B)} = B^k - N_{(B)}}$$

Ejemplo :

$$CA(34_5) = 5^2 - 34_5 = 11_5$$

También :

$$\boxed{CA\,N_{(B)} = \underbrace{100......0}_{\text{"k" ceros}}{}_{(B)} - N_{(B)}}$$

Ejemplo :

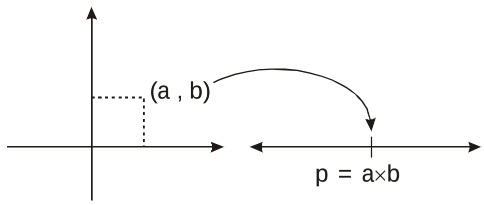
$$CA\left[34_{(5)}\right] = 100_{(5)} - 34_{(5)} = 11_{(5)}$$

MULTIPLICACIÓN

La multiplicación en Z, que utiliza el operador ×, es la operación mediante la cual se asigna a dos números enteros ***a*** y ***b*** denominados factores un único número entero ***p***, llamado producto de ***a*** y ***b***.

$$\boxed{a \times b = p}$$

Producto
Multiplicando
Multiplicador



AXIOMAS PARA LA MULTIPLICACIÓN

Clausura : El producto de dos números enteros es también un número entero.

Conmutativa : Al cambiar el orden de los factores el producto no se altera.

Asociativa : El producto de tres o más números enteros no varía al agrupar los factores de dos en dos.

Elemento neutro o identidad : El único elemento del conjunto de números enteros que multiplicado con otro número entero ***a*** da como resultado el mismo número ***a*** es 1.

Cancelación multiplicativa :
Sean a , b , c en Z.
Si : $ac = bc \;\wedge\; c \neq 0 \Rightarrow a = b$

Distributiva : Para a , b y c $\in$ Z , se cumple :
a(b + c) = ab + ac

DIVISIÓN ENTERA

Dados dos números naturales ***a*** y ***b*** $(b \neq 0)$, se define división (Operación inversa a la multiplicación) de ***a*** entre ***b*** y se denota $\frac{a}{b}$ si existe un ***c*** tal que : $a = b \times c$.
Ahora si ***c*** no es entero, debe existir un ***r*** < ***b*** tal que $a = b \cdot c + r$

I. División entera exacta :

$$\begin{array}{c|l} D & \underline{d} \\ 0 & q \end{array} \longrightarrow \boxed{D = dq}$$

Divisor

Dividendo

II. División entera inexacta :

i) Por defecto :

$$\begin{array}{c|l} D & \underline{d} \\ r & q \end{array} \longrightarrow \text{Cociente por defecto}$$

$$\Rightarrow \boxed{D = dq + r}$$

ii) Por exceso

$$\begin{array}{c|l} D & \underline{\;\;d\;\;} \\ r' & q+1 \end{array} \longrightarrow \text{Cociente por exceso}$$

$$\Rightarrow \boxed{D = d(q + 1) - r'}$$

PROPIEDADES

1. El residuo de una división entera es siempre menor que el divisor.

$$\boxed{\textit{Residuo} < \textit{Divisor}}$$

Como consecuencia :
Residuo máximo = divisor – 1
Residuo mínimo = 1

2. La suma del residuo por defecto y el residuo por exceso de una división entera es igual al divisor.

$$\boxed{r + r' = d}$$

3. Los cocientes por defecto y por exceso de una división son dos números consecutivos.

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. A cierto número par, se le suma los dos números pares que le preceden y los dos números impares que le siguen, obteniéndose en total 968 unidades. El producto de los dígitos del número par de referencia es:

a) 162 b) 63 c) 120
d) 150 e) 36

02. Si la suma de once números enteros consecutivos se halla entre 100 y 116, el número central es :

a) Mayor que 12 b) Impar
c) Primo d) Múltiplo de 11
e) Menor que 19

03. Si : $T_n = 1+3+5+....+(2n-1)$,

hallar el valor de :

$$R=(T_{10}-T_9)+(T_8-T_7)+(T_6-T_5)+(T_4-T_3)+(T_2-T_1)$$

a) 57 b) 53 c) 51
d) 55 e) 59

04. La distancia entre A y B es 10km, un caracol y un galgo parten a la vez de A, el caracol con una velocidad de 1m/min y el galgo con una velocidad de 50m/min. El galgo llega al punto B y regresa en busca del caracol, luego regresa al punto B y vuelve en busca del caracol y así sucesivamente, hasta que ambos llegan a B. ¿Cuál es el espacio total recorrido por el galgo?

a) 50 km b) 200 km c) 100 km
d) 500 km e) 250 km

05. Si n es un número entero positivo, el valor de la suma:

$$3+33+333+...+\underbrace{3........3}_{n\ \text{cifras}} \ \text{es :}$$

a) $\dfrac{10^n-9n-10}{27}$

b) $\dfrac{10^{n+1}+9n-10}{27}$

c) $\dfrac{10^{n+1}-9n-10}{27}$

d) $\dfrac{10^{n+1}+9n+10}{27}$

e) $\dfrac{10^{n+1}-9n+10}{27}$

06. La suma de los términos de una resta es 15684 y si restamos la diferencia del sustraendo nos da 4788. Hallar la suma de las cifras de la diferencia.

a) 11 b) 13 c) 15
d) 17 e) 19

07. La diferencia de dos números de 3 cifras cada uno es 819. Si se invierte el orden de las cifras del sustraendo, la diferencia es ahora 126.
Hallar el minuendo si las cifras del minuendo y el sustraendo suman 33.

a) 872 b) 891 c) 927
d) 957 e) 982

08. Hallar un numeral de 3 cifras significativas que aumenta en 270 cuando se invierte el orden de sus dos primeras cifras, y que disminuye en $\overline{xy5}$ cuando se invierte las cifras de unidades y centenas.

a) 893 b) 762 c) 851
d) 782 e) 691

09. Hallar : a + b

Sabiendo que : $CA(\overline{ab})+CA(\overline{abab})=3674$

a) 8 b) 9 c) 10
d) 11 e) 7

10. Si el CA de un número de 2 cifras es igual al CA del triple de su cifra de unidades.
Calcular la suma de sus cifras

a) 4 b) 5 c) 6
d) 7 e) 8

11. Si a dos números enteros se les disminuye y aumenta 6 unidades respectivamente, el producto de ellos aumenta en 204 unidades.
¿Cuál es la diferencia de los números?

a) 20 b) 30 c) 40
d) 41 e) 45

12. Si el producto 48×35 , se añaden 8 unidades al primer factor.
Para que el producto no varíe, al otro factor hay que :

a) Restarle 5 b) Sumarle 8
c) Restarle 8 d) Dividirlo entre 8
e) Sumarle 5

13. Si el largo de un paralelepípedo se triplica, el ancho se duplica y la altura se cuadruplica, el volumen original se multiplicaría por :

a) 24 b) 12 c) 30
d) 36 e) 6

14. El producto de "P" y "Q "es igual a "C". Si se agrega "Z" unidades a "P", ¿Cuánto se le debe restar a "Q" para que el producto no varíe?

a) $\frac{ZQ}{(Z+P)}$ b) Z c) $\frac{(P-Z)}{(P+Z)}$

d) $\frac{QZ}{(Z-P)}$ e) $\frac{QZ}{(P-Z)}$

15. Al multiplicar dos números uno de los cuales es mayor que el otro en 10 unidades, un postulante cometió un error disminuyendo en 4 la cifra de las decenas en el producto. Al dividir el producto obtenido por el menor de los factores (para comprobar el resultado) obtuvo en el cociente 39 y en el resto 22.
Hallar el producto correcto.

a) 1151 b) 1191 c) 1231
d) 1271 e) 1311

16. La diferencia de 2 números es 832; su cociente es 17, y el residuo el más grande posible.
Encontrar la suma de los números.

a) 881 b) 993 c) 934
d) 890 e) 930

17. La suma de los 4 términos de una división es 425, si se multiplica por 5 el dividendo y el divisor y se vuelve a resolver la operación, la suma de los términos sería 2073.
Hallar el cociente.

a) 13 b) 12 c) 11
d) 14 e) 17

18. El cociente de una división entera es 11 y el resto es 39. Hallar el dividendo si es menor que 500.
Dar como respuesta el número de soluciones posibles.

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

19. Al dividir un número entre 15, el residuo es 12. ¿Cuál será el residuo si se le divide entre 5?

a) 3 b) 1 c) 4
d) 2 e) 0

20. Al dividir un número entre 5 el residuo es 3 y al dividirlo entre 8 es 6. Si los cocientes se diferencian en 9, ¿qué resto dará al dividir el número por 7?

a) 6 b) 3 c) 1
d) 5 e) 2

21. Una persona divide la cantidad de dinero que tiene en su bolsillo entre 100, resultando un número entero m. Si da m monedas de 10 soles a un mendigo, aún le quedan 2160 soles.
¿Cuánto tenía en el bolsillo?

a) 2000 b) 2160 c) 2400
d) 2450 e) 2500

22. Dos personas tienen \$ 4176 y \$ 960 se ponen a jugar a las cartas a \$ 8 la partida. Al final, la primera que ha ganado todas las partidas tiene el quintuplo de lo que tiene la segunda, ¿Cuántas partidas se han jugado?

a) 10 b) 11 c) 12
d) 13 e) 17

23. Se forman todos los números de tres cifras diferentes que pueden ser escritos con las cifras a, b y c diferentes entre sí. De los números formados se suman tres de ellos, notándose que en dos coincide la cifra de mayor orden. Se suman los números restantes y la diferencia entre ambas sumas es 1584.
Halle : a + b + c, si una de las cifras es la semisuma de las otras dos.

a) 6 b) 9 c) 12
d) 15 e) 18

24. Calcule la suma de todos los números de la forma
$\overline{n(2n-1)m\left(\frac{m}{2}\right)a\left(\frac{a}{3}\right)}$.
Dar la suma de cifras.

a) 35 b) 36 c) 38
d) 40 e) 29

25. Calcular la suma de todos los números de la forma :

$$\overline{(a+2)ab\left(\frac{b}{2}\right)}_{(7)}$$

Expresar el resultado en la base 49 y dar como respuesta la suma de sus cifras.

a) 42 b) 43 c) 44
d) 46 e) 48

26. Si : $CA(\overline{abc}) = a \times c$, ¿cuál es la suma de todos los valores de $\overline{abc}$?

a) 7946 b) 8358 c) 8595
d) 8818 e) 9236

27. Al formar todos los numerales posibles de 3 cifras diferentes en base 7 con las cifras a ; b y c; y sumarlos, se cometió el error de hacer la suma en base 9; resultando $\overline{dee4}_{(9)}$.

a) 32 b) 40 c) 45
d) 48 e) 56

28. La suma de las cifras de la diferencia de $\overline{abcd}_{(n)} - \overline{dcba}_{(n)}$ es 24.
¿Cuál es el valor de "n" sabiendo que :

a > d y c < b?

a) 11 b) 12 c) 13
d) 14 e) 15

29. ¿Cuántos números de 3 cifras existen, tal que el complemento aritmético sea igual al producto de sus cifras?

a) 1 b) 2 c) 3
d) 99 e) 990

30. Sabiendo que todas las letras tienen valores distintos y diferentes de cero.
Además se cumple que : $\overline{TRECE} - \overline{OCHO} = \overline{CINCO}$
Hallar la suma de todas las soluciones de :
"T + R + E + C + O + H + I + N"
y dar como respuesta la suma de sus cifras.

a) 5 b) 6 c) 7
d) 8 e) 4

31. Si en lugar de multiplicar un número N por $\overline{ab}$ se multiplica por $\overline{ba}$, este producto más N unidades es el doble del producto original.
Hallar : (a + b)

a) 8 b) 9 c) 10
d) 12 e) 14

32. Si : $\overline{abcd} \times 99999 = ...6876$

Calcular la suma de cifras de : $\left[\overline{(a+1)b} + \overline{cd}\right]^2$

a) 9 b) 11 c) 12
d) 10 e) 13

33. La cantidad de cifras de los números A, B y C son números consecutivos. Si el producto $A^4B^3C^2$ tiene por lo menos 125 cifras, entonces la cantidad máxima de cifras que puede tener dicho producto es :

a) 130 b) 131 c) 132
d) 133 e) 134

34. El número de cifras que puede tener A del 5 al 9; el de B varía del 7 al 11 y el de C varía del 5 al 10. El máximo número de cifras que puede tener $\left[\frac{A \times B}{C}\right]^3$ es :

a) 36 b) 48 c) 60
d) 64 e) 38

35. El número de cifras de A es el doble de B y el cuádruple de C. Si D tiene 5 cifras,

¿cuántas cifras puede tener : $R = \dfrac{A^3D}{B^4 \cdot C^4}$?

a) 1 a 5 b) 2 a 8 c) 1 a 11
d) 2 a 13 e) 1 a 12

36. Encontrar un número entero tal que al dividirlo entre 82 deje como resto por defecto el duplo del cociente por exceso y como resto por exceso, el triple del cociente por defecto.

a) 1256 b) 1346 c) 1420
d) 1446 e) 1344

37. Al dividir un número de 3 cifras entre otro de dos cifras, se obtiene 11 de cociente y 25 de residuo. Se les toma el complemento aritmético y se les vuelve a dividir, esta vez se obtiene 7 de cociente y 19 de residuo.
Hallar la suma de las cifras del dividendo y el divisor.

a) 25 b) 26 c) 27
d) 28 e) 29

38. En una división entera el cociente por defecto es 9, los residuos por defecto y por exceso son iguales y la suma del dividendo y divisor es 210.
Hallar el dividendo.

a) 190 b) 150 c) 180
d) 170 e) 160

39. Se divide $\overline{86x43x}$ entre $\overline{b0b}$. Se obtiene $\overline{4b84}$ de cociente y como residuo 67.
Dar (x - b)

a) 6 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

40. El dividendo de una división termina en 305 y el cociente es 526. Si el residuo es máximo, ¿Cuál es la suma de las cifras del divisor si tiene 3 cifras?

a) 15 b) 18 c) 20
d) 21 e) 19

41. Hallar la suma de todos los números de 12 cifras cuya suma de cifras sea 107.
Dé como respuesta la suma de las cifras del resultado.
a) 69 b) 81 c) 92
d) 97 e) 96

42. Sea : $a_n = \left[\dfrac{2n^4 + 2n^3 + n^2 + n}{n(n+1)}\right]$

Calcule : $\sum_{n=1}^{100} a_n$

Dar la suma de sus cifras.

a) 27 b) 26 c) 24
d) 28 e) 29

43. Hallar la media armónica de los siguientes números.
28 ; 70 ; 130 ; 208 ; ..... ("n" términos)
Sabiendo que la suma de estos es 4330.

a) 136 b) 306 c) 160
d) 300 e) 204

44. En una progresión aritmética, los elementos de los lugares j, k y (j + k) son tales, que la suma de los primeros es igual al último menos 1. Si la suma de los primeros es x, hallar la razón de la progresión.

a) $\dfrac{x}{(j+k-1)}$ b) $\dfrac{(x+1)}{(j+k-1)}$

c) $\dfrac{(x+2)}{(j+k-1)}$ d) $\dfrac{(x+2)}{(j+k)}$

e) $\dfrac{(x-2)}{(j+k-1)}$

45. Calcular la suma de todos los números enteros de tres cifras de la base "n" que no usan su cifra máxima.

a) $(n-1)^2 \times (n-2) \times (n-3)^3$

b) $(n-2)^2 \times (n-1) \times n \times (n^2+1)$

c) $\dfrac{(n-2)\times(n-1)^2}{2} \times (n^3 - n - 2)$

d) $(n-1) \times (n-2) \times (n-3)^2$

e) $\dfrac{(n-2)(n-1)^3}{2}$

46. Si : $\overline{abn} + \overline{ban} = \overline{xxx}$
Donde cada cifra es un valor par.
Determine el valor de : a + b, si letras distintas toman valores diferentes.

a) 4 b) 8 c) 6
d) 10 e) 12

47. Sabiendo que :

$\overline{abcd} = \overline{dcba} + \overline{m9n2}$; b = c

Si : $\overline{dsmc}_{(12)} + CA\left(\overline{rmnst}_{(12)}\right) = \overline{6pnb}_{(12)}$

Calcule : A = m + n + r + s + t + p + a + d

a) 45 b) 47 c) 46
d) 48 e) 49

48. ¿Cuál es el máximo valor que puede tomar "S" en el sistema decimal?

$$S = 33_{(33)} + 35_{(34)} + 37_{(35)} + 39_{(36)} + ...$$

Dar como respuesta la suma de cifras del resultado.

a) 12 b) 15 c) 18
d) 21 e) 26

49. En una sucesión de 5 números enteros consecutivos y positivos, la suma de los cuadrados de los 3 primeros es igual a la suma de los cuadrados de los 2 últimos, entonces el segundo término de la sucesión es :

a) 8 b) 9 c) 10
d) 11 e) 12

50. Determinar la suma de la razón y el número de términos de la siguiente progresión aritmética :

$$\underbrace{\overline{abc} ; A ; B ; ...... ; C ; D ; \overline{def}}_{(2k)\ \text{términos}}$$

Sabiendo que : A + B + C + D = 1966
Además la suma de términos es 29490 y f – c = 1

a) 63 b) 65 c) 67
d) 69 e) 71

51. Si : $\overline{abab}\cdot\overline{cd}=\overline{dbcca}$

Y el producto de $\overline{ab}$ por $\overline{cd}$ tiene como suma de cifras 12, además a, b, c, d son cifras significativas (c < d)
Hallar : a – b + c – d

a) – 4 b) 4 c) – 2
d) 2 e) 0

52. Hallar todos los números de 3 cifras tales que multiplicados por su complemento aritmético, el producto termine en 831.
Dar como respuesta la suma de cifras de la suma de los números de 3 cifras.

a) 15 b) 36 c) 27
d) 18 e) 24

53. Usando los dígitos 1 ; 2 ; 3 ; 4 , 5 ; 6 ; 7 ; 8 y 9 (una vez cada uno) forman dos números tales que su producto sea el mayor posible.
¿Cuál es la suma de las cifras de este producto?

a) 36 b) 40 c) 42
d) 39 e) 45

54. Sea N un número de tres cifras tal que el CA(N) tiene 2 cifras, si además : $CA(N)\cdot N=\overline{7bcd5}$
Calcular : b + c + d

a) 13 b) 14 c) 21
d) 18 e) 20

55. Al dividir el número $\overline{7x7}$ entre $\overline{3y}$ se obtiene un cociente de dos cifras iguales y además, $\overline{z7}$ de residuo.
Hallar (x + y+ z + w) siendo "w" una de las cifras del cociente y el dividendo lo mayor posible.

a) 15 b) 16 c) 17
d) 18 e) 19

56. Al dividir un número de 3 cifras entre el CA de su CA se obtuvo un residuo por exceso igual a 3, y un residuo por defecto mayor que 30.
Hallar la suma de las cifras del número.

a) 21 b) 16 c) 14
d) 17 e) 18

57. Sean los números a, b y r enteros. Al dividir (a + b) entre b, se obtiene como cociente 3r y como resto r.
Si a > 15r y b es primo menor a 10.
Entonces b es igual a :

a) 1 b) 2 c) 3
d) 5 e) 7

58. Hallar el valor de (c + d) si al dividir $\overline{5cd}$ entre $\overline{ab}$ resulta como cociente $\overline{ba}$ y $\overline{bb}$ como residuo.

a) 9 b) 10 c) 11
d) 12 e) 13

59. Teniendo en cuenta que a = b + c y que al dividir $\overline{aaaa}$ entre $\overline{bbb}$ los residuos sucesivos son $\overline{ccc}$ y a.
Hallar la suma de los posibles cocientes.

a) 25 b) 57 c) 59
d) 75 e) 105

60. Al realizar la división entre dos números enteros, se observa que los residuos por defecto y por exceso son $\overline{m2r}$ y $\overline{r2m}$ respectivamente; cuya diferencia es $\overline{ab2}$.
Determine el menor valor posible del dividendo, si el cociente por exceso es igual al CA del cociente por defecto aumentado en uno.

a) 6170 b) 5121 c) 4329
d) 5271 e) 6271

Claves

01.	e
02.	e
03.	d
04.	d
05.	c
06.	c
07.	d
08.	e
09.	b
10.	c
11.	c
12.	a
13.	a
14.	a
15.	d
16.	e
17.	a
18.	b
19.	d
20.	a
21.	c
22.	d
23.	d
24.	e
25.	a
26.	c
27.	b
28.	c
29.	a
30.	b

31.	c
32.	e
33.	d
34.	b
35.	d
36.	b
37.	d
38.	a
39.	d
40.	d
41.	e
42.	a
43.	a
44.	d
45.	c
46.	b
47.	b
48.	b
49.	d
50.	d
51.	a
52.	c
53.	e
54.	c
55.	d
56.	b
57.	e
58.	e
59.	d
60.	b