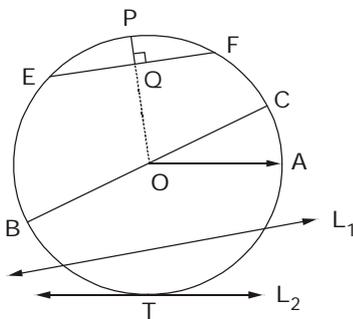


Definición :

Es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que equidistan de otro punto de su plano denominado centro. La distancia mencionada recibe el nombre de radio.

Elementos de la Circunferencia



- * Centro : O
- * Radio : \overline{OB}
- * Diámetro : \overline{BC}
- * Cuerda : \overline{EF}
- * Arco : \widehat{EB}
- * Flecha o sagita : \overline{PQ}
- * Secante : L_1
- * Tangente : L_2
- * Punto de Tangencia : T
- * Perímetro : L = Longitud de la circunferencia.

$$L = 2\pi r$$

r → radio

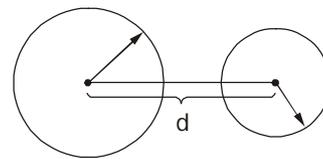
π → phi

$$\pi = \frac{L}{2r}$$

$\pi = 3,1415926 \dots\dots$

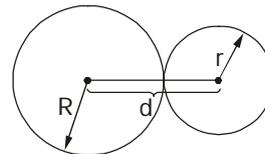
Posiciones relativas de dos Circunferencias Coplanares

* **Circunferencias Exteriores**



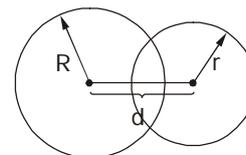
$$d > R + r$$

* **Circunferencias Tangentes Exteriores**



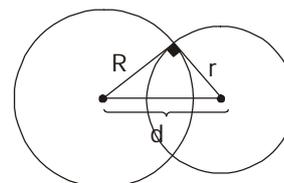
$$d = R + r$$

* **Circunferencias Secantes**



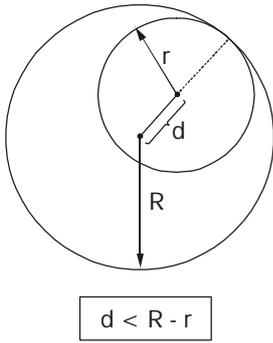
$$R - r < d < R + r$$

* **Circunferencias Ortogonales**

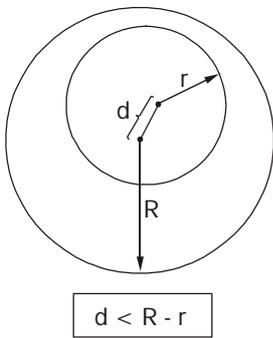


$$d^2 = R^2 + r^2$$

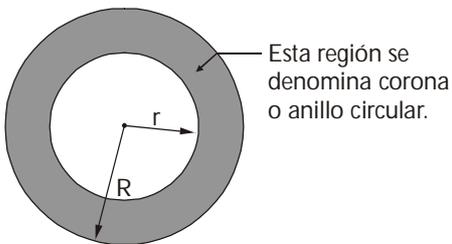
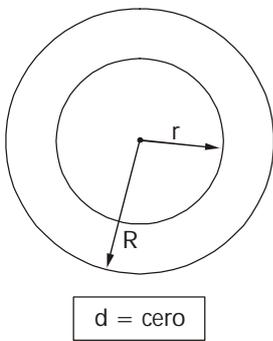
* **Circunferencias Tangentes Interiores**



* **Circunferencias Interiores**



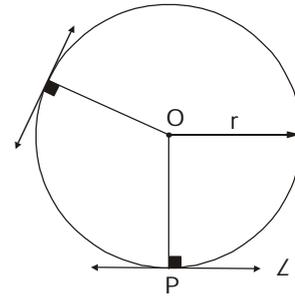
* **Circunferencias Concéntricas**



Observación : "d" → distancia entre los centros.

Propiedades Fundamentales

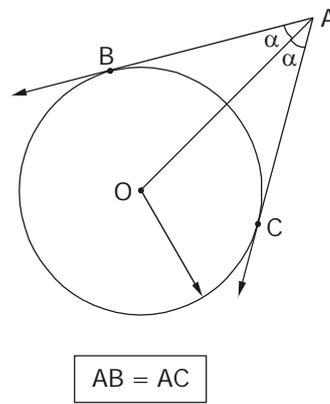
1.



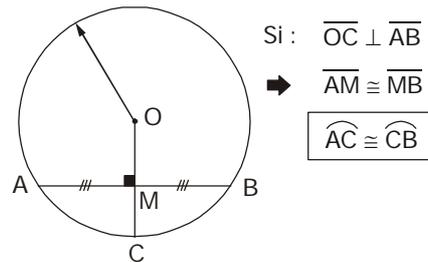
* P → punto de tangencia

* $\overline{OP} \perp \vec{l}$
 $\Rightarrow OP = r$

2.



3.

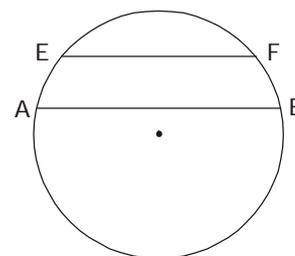


Si : $\overline{OC} \perp \overline{AB}$

→ $\overline{AM} \cong \overline{MB}$

$\widehat{AC} \cong \widehat{CB}$

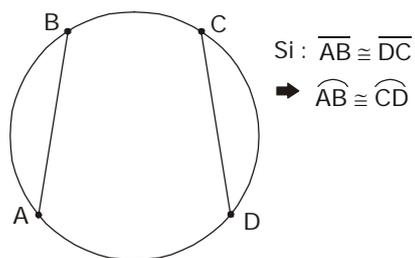
4.



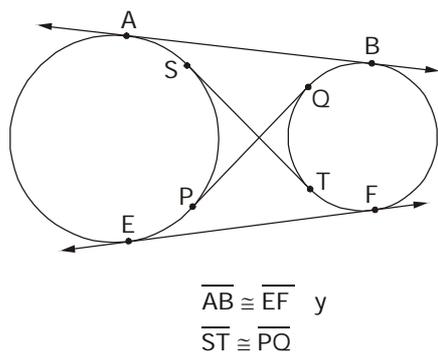
Si : $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$

→ $\widehat{AE} \cong \widehat{FB}$

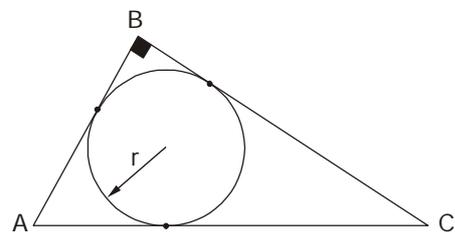
5.



6.

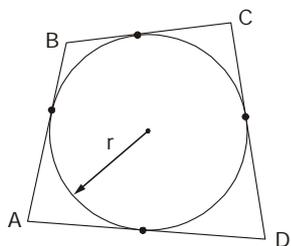


Teorema de Poncelet



$\boxed{AB + BC = AC + 2r}$

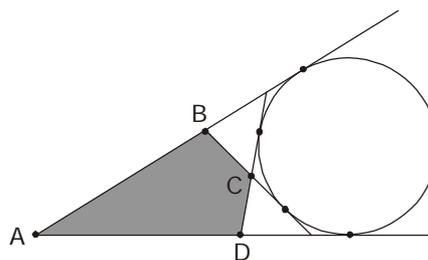
Teorema de Pitot



$\boxed{AB + CD = BC + AD}$

* Este teorema es válido para todo polígono circunscrito cuyo número de lados es un número par.

Teorema de Steiner



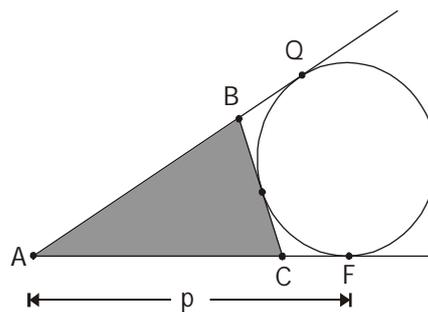
$\boxed{AB - CD = AD - BC}$

Observaciones

* Q y F → puntos de tangencia
 p → semi-perímetro del triángulo ABC.

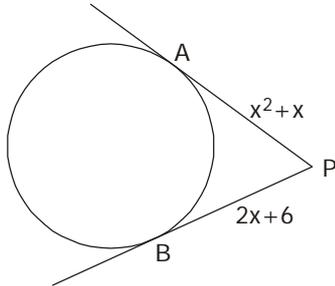
$p = \frac{a + b + c}{2}$

$\Rightarrow \boxed{AQ = AF = p}$

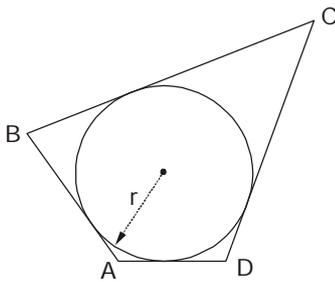


Test de aprendizaje preliminar

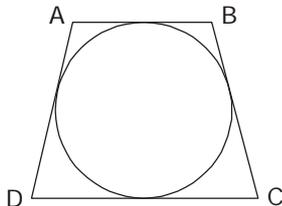
01. En el gráfico, calcule PA, si : A y B son puntos de tangencia.



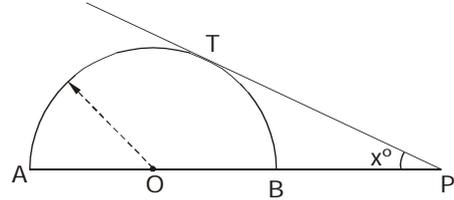
02. En el gráfico : AB = 7 cm, CD = 7,5 cm y AD = 4 cm. Calcule BC.



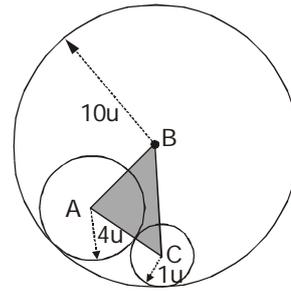
03. En el trapecio isósceles : AD = BC = 8 cm. Calcule la longitud de la mediana del trapecio. ($\overline{AB} \parallel \overline{DC}$).



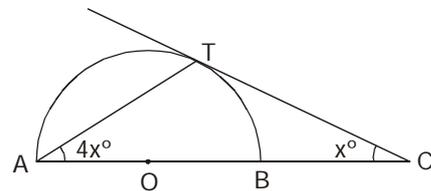
04. Calcule "x°", si "T" es punto de tangencia. AO = OB = BP = 1 u.



05. Calcule el perímetro del triángulo ABC.

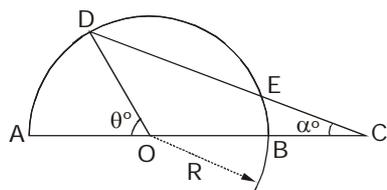


06. Calcule "x°", si "O" es centro. (T : punto de tangencia).



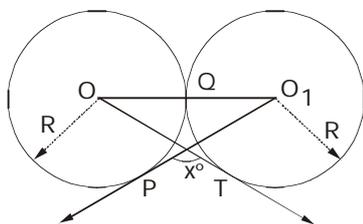
07. La distancia entre los centros de dos circunferencias coplanares es 5 cm. Si sus radios miden 2,5 cm y 1,5 cm, las circunferencias son :

08. Si : $AO = EC$. Calcule : " θ° ".



09. Dado el romboide ABCD donde: $m \angle A = 64^\circ$, los centros de las circunferencias inscritas a los triángulos ABD y BCD son O y O_1 respectivamente. Calcule la $m \angle ODO_1$.

10. Siendo : P, Q y T puntos de tangencia. Calcule " x° ".



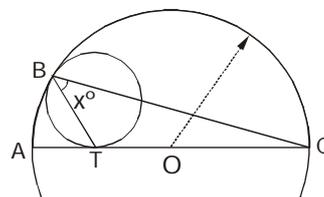
Practiquemos :

11. Una circunferencia está inscrita en un trapecio isósceles ABCD ($\overline{BC} \parallel \overline{AD}$). Si : $AB = 12$ cm. Calcule la longitud de la mediana de dicho trapecio.

12. ¿En qué relación están las longitudes de los radios de las circunferencias inscrita y circunscrita a un triángulo equilátero?

13. En una circunferencia de centro "O", se ubica la cuerda \overline{BC} de 80 u de longitud. Si el radio de la circunferencia mide 41 u, calcule la distancia de "O" hacia la cuerda.

14. En el gráfico, calcule : x° . (B y T son puntos de tangencia).



15. En un triángulo ABC, se sabe que :
 $AB = 8$ u, $BC = 10$ u y $AC = 12$ u, la circunferencia inscrita determina sobre \overline{AC} el punto "M".
 Calcule AM.

16. El punto de tangencia de la circunferencia inscrita en un trapecio rectángulo divide al mayor de los lados no paralelos en segmentos que miden 1 u y 9 u. Calcule la longitud de la mediana del trapecio.

17. En un triángulo ABC acutángulo, la circunferencia inscrita es tangente a \overline{AB} en N y la circunferencia exinscrita relativa a \overline{AC} es tangente a la prolongación de \overline{BA} en M.
 Calcule AC. Si : $AN = 3,5$ u y $AM = 4,5$ u.

18. Se tiene un octógono ABCDEFGH circunscrito a una circunferencia, donde :
 $AB = 1$ u, $BC = 1$ u, $CD = 1,5$ u; $DE = 0,5$ u; $EF = 2$ u, $FG = 2,7$ u; $HA = 0,8$ u.
 Calcule GH.

19. Marcar verdadero (V) o falso (F), en las siguientes proposiciones :

- I. La recta que contiene los centros de dos circunferencias secantes es perpendicular a la recta que contiene los puntos comunes a las dos circunferencias.
- II. El ángulo central de una circunferencia mide 0° (cero grados).
- III. La mediatriz de toda cuerda contiene al centro del círculo.
- IV. Ángulo inscrito es aquel cuyo vértice está sobre la circunferencia.

20. Las longitudes de dos circunferencias coplanares están en relación de 7 a 3 y su suma es igual a 20π . Si la distancia entre sus centros es dos veces la diferencia de las longitudes de sus radios, podemos decir que las circunferencias son :

Problemas propuestos

21. Los diámetros de dos circunferencias situadas en el mismo plano miden 14 m y 6 m. Si la distancia entre sus centros es 10m. Las circunferencias son :

- a) Exteriores.
- b) Interiores.
- c) Tangentes.
- d) Secantes.
- e) Concéntricas.

22. La prolongación de \overline{CA} de un triángulo ABC intersecta a la circunferencia exinscrita relativa a \overline{AB} en el punto P. Siendo :
 $CP = 20$ u, calcule el perímetro de la región triangular ABC.

- a) 20 u
- b) 40 u
- c) 30 u
- d) 60 u
- e) 50 u

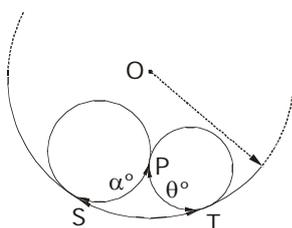
23. Calcule la longitud del lado del triángulo equilátero inscrito en una circunferencia de 8 cm de diámetro.

- a) $4\sqrt{3}$ cm b) $8\sqrt{3}$ cm c) $2\sqrt{3}$ cm
 d) $8\sqrt{2}$ cm e) 8 cm

24. Si el radio de la circunferencia se aumenta en 1 u, calcule la razón de la longitud de la nueva circunferencia al diámetro es :

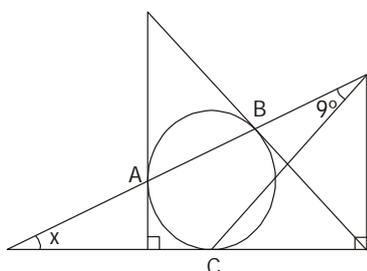
- a) π b) $\frac{2\pi+1}{2}$ c) $\frac{2\pi-1}{2}$
 d) $\pi-2$ e) $2\pi-1$

25. Calcule la medida del arco ST, si :
 $\alpha^\circ + \theta^\circ = 257^\circ$, si : S, P y T son puntos de tangencia.



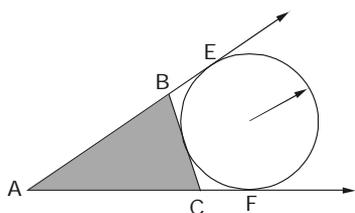
- a) 77° b) 80° c) 103°
 d) 75° e) 90°

26. En el gráfico : A, B y C son puntos de tangencia. Calcule : " x° ".



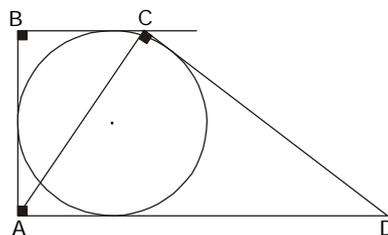
- a) 20° b) 27° c) 36°
 d) 54° e) 60°

27. En el gráfico mostrado : $AB = 12$ dm, $BC = 8$ dm y $AC = 10$ dm. Calcule : $(\frac{EB}{FC})$.



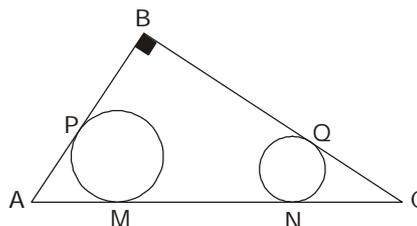
- a) $\frac{4}{3}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{3}{5}$
 d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{4}{7}$

28. Calcule BC. Si los inradios de los triángulos rectángulos ABC y ACD miden r_1 y r_2 .



- a) $\sqrt{r_1^2 + r_2^2}$ d) $\sqrt{r_1 \cdot r_2}$
 b) $r_1 + r_2$ e) $\frac{r_1 + r_2}{2}$
 c) $\frac{r_1 \cdot r_2}{r_1 + r_2}$

29. En el gráfico : P, Q, M y N son puntos de tangencia. $BP + BQ = 13$ u, $MN = 6$ u. Calcule el inradio del triángulo ABC.

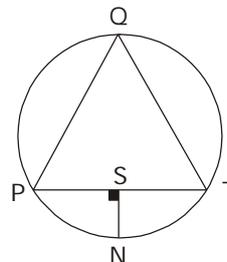


- a) 2,5 u b) 3,5 u c) 4,5 u
 d) 1,5 u e) 5,5 u

30. El perímetro de un triángulo rectángulo es 24 m y su hipotenusa mide 10 m. Calcule el radio de la circunferencia inscrita.

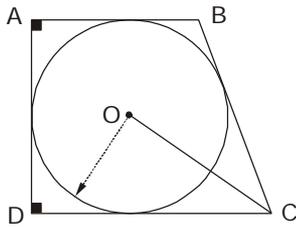
- a) 1 m b) 2 m c) 3 m
 d) 4 m e) 5 m

31. En el gráfico, el triángulo equilátero PQT, inscrito en una circunferencia. Calcule SN, en función del radio R. Si : $PS = ST$.



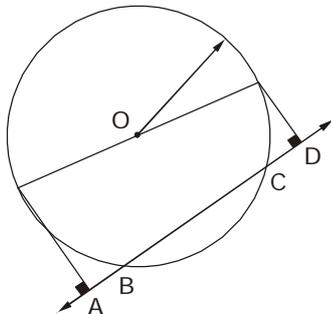
- a) $R/2$ b) $R/3$ c) $R/4$
 d) $R\sqrt{2}$ e) $R\sqrt{3}$

32. En el gráfico, ABCD es un trapecio rectángulo. $BC = 10$ m, $OC = 8$ m. Calcule la altura del trapecio.



- a) 4,8 m b) 9,6 m c) 4 m
d) 8 m e) 10 m
33. Si uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 15 cm y la distancia del baricentro al ortocentro es $25/3$ cm. La altura relativa a la hipotenusa en cm mide :
- a) 13 cm b) 14 cm c) 16 cm
d) 12 cm e) 15 cm
34. Los diámetros de dos circunferencias coplanares y las distancias entre sus centros, están en la relación 13 : 10: 1. Estos circunferencias son :
- a) Secantes.
b) Tangentes interiores.
c) Interiores.
d) Exteriores.
e) Concéntricos.

35. En el gráfico : $AB = 3$ u y $BC = 13$ u. Calcule AD.



- a) 16 u b) 18 u c) 19 u
d) 21 u e) 22 u
36. En dos circunferencias ortogonales de radios R y r respectivamente, se cumple que la distancia d entre sus centros es :
- a) $4(R - r) < d < R + r$
b) $R + r < d$
c) $(R - r) / 2 < d < (R + r) / 2$
d) $d^2 = R^2 + r^2$
e) $R + r = d$

37. El radio de la circunferencia y el perímetro de un triángulo rectángulo circunscrito a dicha circunferencia miden 3 cm y 50 cm respectivamente. Entonces, el radio de la circunferencia circunscrita al triángulo rectángulo mide :

- a) 44 cm b) 22 cm c) 11 cm
d) 12 cm e) 13 cm

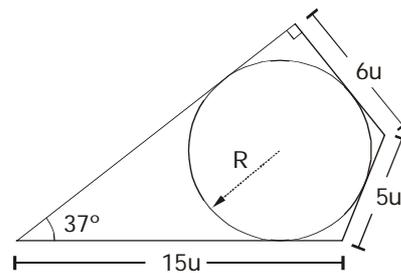
38. Sean O y O' los centros de dos circunferencias tangentes exteriormente cuyos diámetros son 2 u y 6 u respectivamente. Calcule el ángulo agudo formado por la recta que une los centros y la tangente común a las circunferencias.

- a) 60° b) 45° c) 30°
d) 15° e) 75°

39. En un triángulo rectángulo, cuya hipotenusa mide 48 cm, se inscribe una circunferencia de longitud 24π cm. ¿Cuál es el perímetro de dicho triángulo?

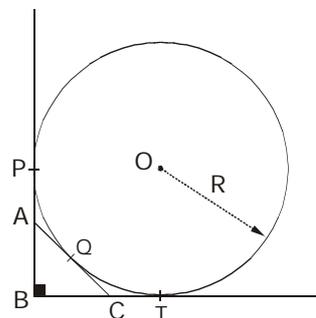
- a) 120 cm b) 144 cm c) 96 cm
d) 72 cm e) 60 cm

40. Del gráfico, calcule "R".



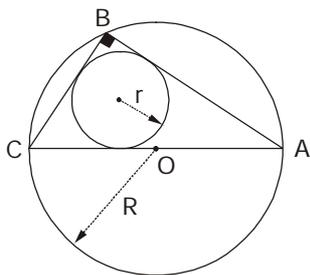
- a) 3 u b) 4 u c) 5 u
d) 6 u e) 8 u

41. Calcule "R", si : $AB = 9$ u y $BC = 12$ u. (P, Q y T : puntos de tangencia).



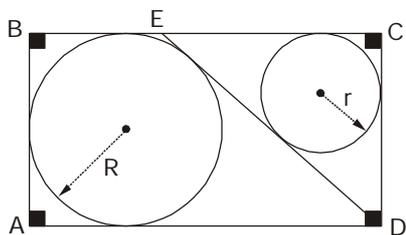
- a) 15 u b) 16 u c) 18 u
d) 20 u e) 22 u

42. En el gráfico, calcule : $R + r$, si : $AB = 15 \text{ u}$ y $BC = 8 \text{ u}$.



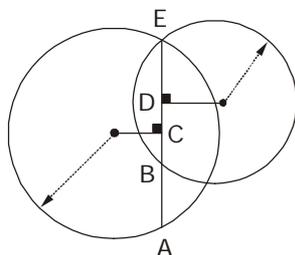
- a) 23 u b) 11,5 u c) 10,5 u
d) 13,5 u e) 14 u

43. En el gráfico : $R = 3 \text{ u}$ y $r = 1 \text{ u}$. Calcule BE.



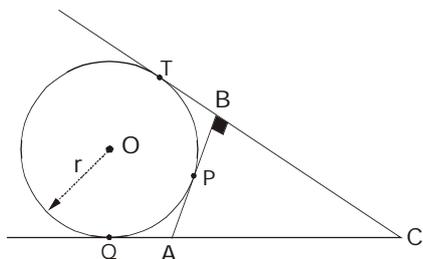
- a) 3 u b) 4 u c) 5 u
d) 6 u e) 7 u

44. En el gráfico, calcule AB, si : $CD = 6 \text{ cm}$.



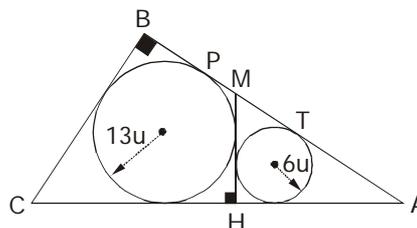
- a) 6 cm b) 8 cm c) 10 cm
d) 12 cm e) 9 cm

45. Calcule "r", si : $AB = 5 \text{ u}$ y $BC = 12 \text{ u}$.
(T, P y Q son puntos de tangencia).



- a) 2 u b) 3 u c) 4 u
d) 5 u e) 10 u

46. Calcule PT.
P y T : puntos de tangencia.

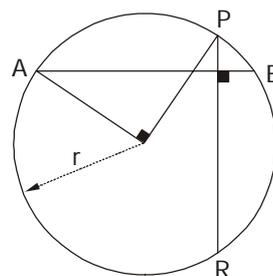


- a) 15 u b) 17 u c) 19 u
d) 21 u e) 22 u

47. En un cuarto de circunferencia de centro "O" y radios \overline{OA} , \overline{OB} ; se toma el punto "E" y luego : $\overline{AH} \perp \overline{OE}$; $\overline{BP} \perp \overline{OE}$ (H y P sobre \overline{OE}).
Calcule EP, si : $AH = 15 \text{ u}$ y $BP = 8 \text{ u}$.

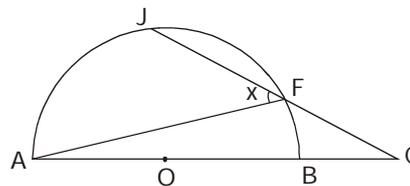
- a) 1 u b) 2 u c) 3 u
d) 4 u e) 5 u

48. Calcule BR, siendo : $r = 4 \text{ u}$.



- a) 8 u b) 4 u c) $4\sqrt{2} \text{ u}$
d) $8\sqrt{2} \text{ u}$ e) $2\sqrt{2} \text{ u}$

49. En la figura : $AO = OB = JF = FC$.
Calcule " x° ", si : \overline{AB} es diámetro.

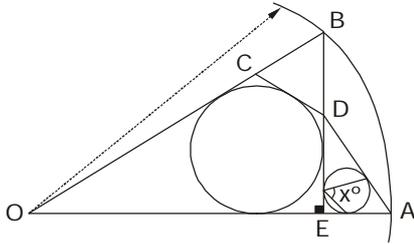


- a) 15° b) 30° c) 45°
d) 60° e) 12°

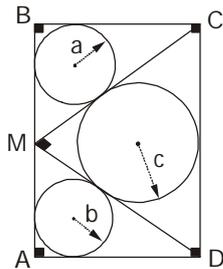
50. Los diámetros de dos circunferencias situadas en el mismo plano están en la relación de 10 a 6 y la distancia entre sus centros es como 5. Tales circunferencias son:

- a) Tangentes interiormente
b) Exteriores
c) Interiores
d) Tangentes exteriormente
e) Secantes

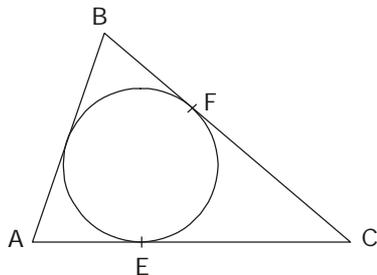
51. En el gráfico, calcule "x°", si :
 $BC = 6u$, $CD = 1u$ y $EA = 3u$.
 ("O" centro).



- a) 45° b) 53° c) 55°
 d) 60° e) 63° 30'
52. En un triángulo rectángulo, calcule la longitud de la hipotenusa, si el radio de la circunferencia inscrita mide 5 cm y el radio de la circunferencia exinscrita relativa a la hipotenusa mide 14 cm.
- a) 5 cm b) 7 cm c) 6 cm
 d) 8 cm e) 9 cm
53. En el gráfico, calcule AD.

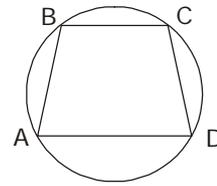


- a) $a + b - c$ b) $b + c - a$
 c) $a \cdot b \cdot c$ d) $a + b + c$
 e) $\frac{a + 2b + c}{3}$
54. En el gráfico :
 p : semiperímetro del triángulo ABC.
 Calcule : $R = \frac{(p-a)(p-b)}{2 \cdot AE \cdot BF}$



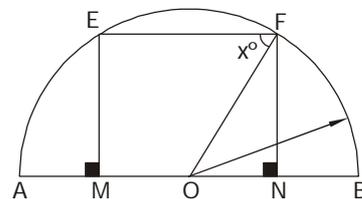
- a) 2 b) 1 c) 1/2
 d) 2/3 e) 4/3

55. En la figura : $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $m\widehat{ABC} = m\widehat{AD}$;
 $BC = a$ y $AD = b$. Calcule la distancia entre los puntos medios de las flechas de \overline{AB} y \overline{CD} .

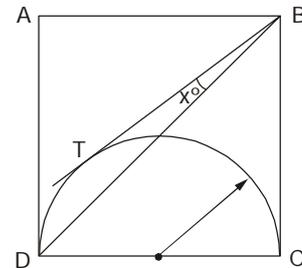


- a) $\frac{a + 3b}{4}$ b) $\frac{2a + 3b}{4}$ c) $\frac{2a + b}{4}$
 d) $\frac{3a + 2b}{4}$ e) $\frac{a + b}{2}$
56. En una línea recta, se ubican los puntos consecutivos A, B y C ($AB > BC$); a un mismo lado de dicha recta se trazan las semicircunferencias de diámetros \overline{AB} y \overline{BC} respectivamente y por C se traza la tangente \overline{CT} a una de ellas. Calcular la medida del ángulo formado por \overline{BT} y la bisectriz del ángulo BCT.

- a) 45° b) 30° c) 60°
 d) 15° e) 37°
57. En el gráfico :
 $AM = 4u$; $MN = 11u$ y $NB = 5u$. Calcule "x°".



- a) 60° b) $113^\circ/2$ c) 90°
 d) 70° e) 67°
58. ABCD es un cuadrado y "T" es punto de tangencia. Calcule "x°".

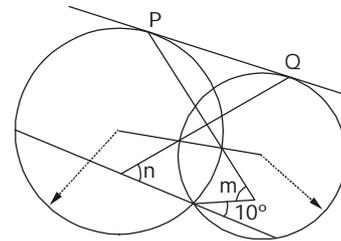


- a) 6° b) 8° c) 12°
 d) 16° e) 18°

59. Se tiene un triángulo rectángulo ABC circuncrito a una circunferencia de centro I; dicha circunferencia es tangente a los catetos \overline{AB} y \overline{BC} en P y Q respectivamente. Las prolongaciones de \overline{PI} y \overline{QI} corta a \overline{AC} en R y L. Las circunferencias inscritas en los triángulos PAR y LQC son tangentes en M y N a \overline{AC} respectivamente. Calcule MN, si los radios de las circunferencias menores miden 2 u y 3 u.

- a) 1 u b) 2,5 u c) 4 u
- d) 5 u e) 6 u

60. En el gráfico : P y Q son puntos de tangencia. Calcule : $m + n$.



- a) 90° b) 100° c) 110°
- d) 120° e) 130°

Claves

21.	<i>d</i>
22.	<i>b</i>
23.	<i>b</i>
24.	<i>a</i>
25.	<i>a</i>
26.	<i>c</i>
27.	<i>c</i>
28.	<i>b</i>
29.	<i>b</i>
30.	<i>b</i>
31.	<i>a</i>
32.	<i>b</i>
33.	<i>d</i>
34.	<i>c</i>
35.	<i>c</i>
36.	<i>d</i>
37.	<i>c</i>
38.	<i>c</i>
39.	<i>a</i>
40.	<i>b</i>

41.	<i>c</i>
42.	<i>b</i>
43.	<i>c</i>
44.	<i>d</i>
45.	<i>b</i>
46.	<i>c</i>
47.	<i>b</i>
48.	<i>c</i>
49.	<i>c</i>
50.	<i>e</i>
51.	<i>e</i>
52.	<i>e</i>
53.	<i>d</i>
54.	<i>c</i>
55.	<i>a</i>
56.	<i>a</i>
57.	<i>b</i>
58.	<i>b</i>
59.	<i>d</i>
60.	<i>b</i>