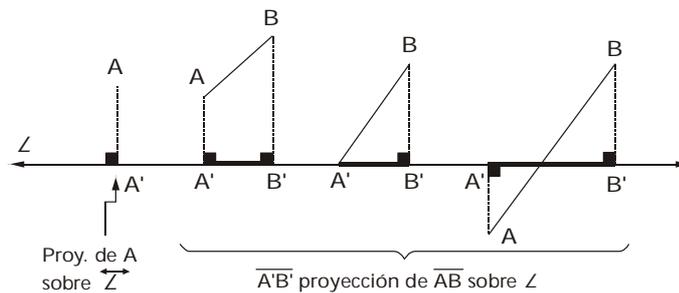


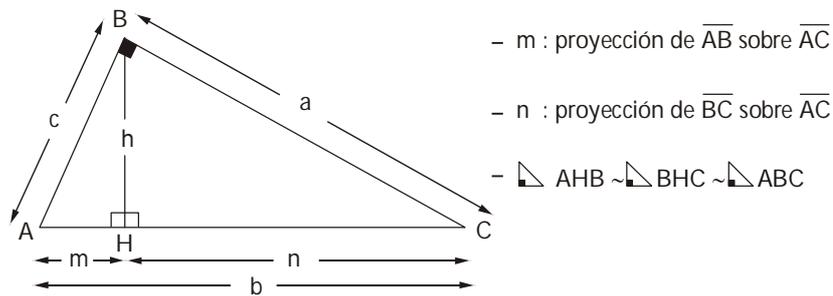
Capítulo 10

RELACIONES MÉTRICAS EN UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO

* PROYECCIONES ORTOGONALES SOBRE UNA RECTA



**



I. Un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre dicha hipotenusa.

$$\frac{c}{b} = \frac{m}{c} \rightarrow \boxed{c^2 = b \cdot m}$$

$$\frac{a}{b} = \frac{n}{a} \rightarrow \boxed{a^2 = b \cdot n}$$

II. La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre las proyecciones de los catetos sobre dicha hipotenusa.

$$\frac{h}{m} = \frac{n}{h} \rightarrow \boxed{h^2 = m \cdot n}$$

III. La suma de los cuadrados de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

$$\boxed{c^2 + a^2 = b^2}$$

IV. El producto de los catetos es igual al producto de la hipotenusa con la altura relativa a la hipotenusa.

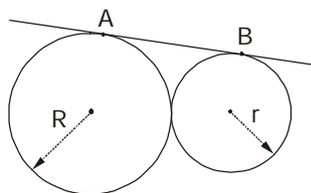
$$\boxed{c \cdot a = b \cdot h}$$

V. La suma de los cuadrados de las inversas de los catetos es igual al cuadrado de la inversa de la altura relativa a la hipotenusa.

$$\frac{1}{c^2} + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{h^2}$$

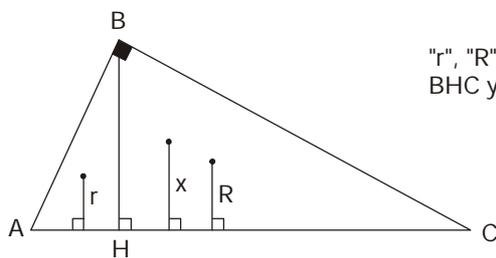
PROPIEDADES

1.



$$AB = 2\sqrt{R \cdot r}$$

2.

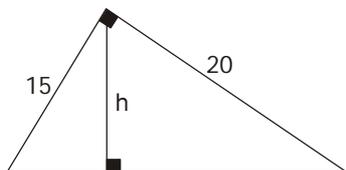


"r", "R" y "x" inradios de los triángulos AHB, BHC y ABC respectivamente.

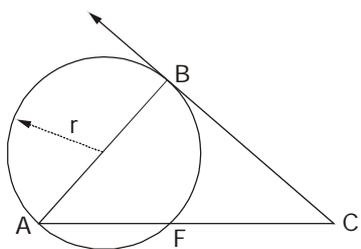
$$x^2 = r^2 + R^2$$

Test de aprendizaje preliminar

01. Calcule "h".

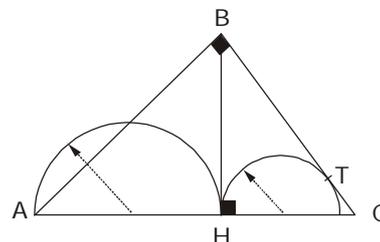


02. En el gráfico, B es punto de tangencia.
 $AF = 6 \text{ dm}$ y $AC = 18 \text{ cm}$.
 Calcule "r".

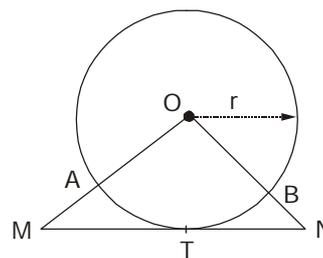


03. La altura de un triángulo rectángulo determina, en la hipotenusa, segmentos de $18u$ y $32u$. Calcule los catetos.

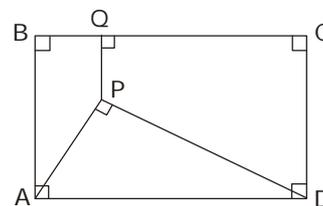
04. Los radios de los semicírculos miden $2,5 \text{ dm}$ y 2 dm .
 Calcule BH. (T : punto de tangencia).



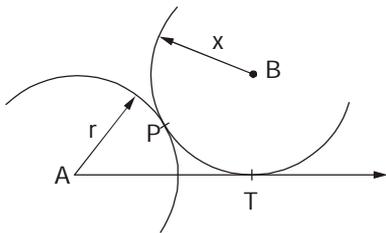
05. Calcule "r", si : $MT = 9 \text{ cm}$: $TN = 2 \text{ cm}$.
 $m \angle AOB = 90^\circ$. ("T" es punto de tangencia).



06. Calcule PD, si : $BQ = 4,5 \text{ cm}$ y $QC = 8 \text{ cm}$.

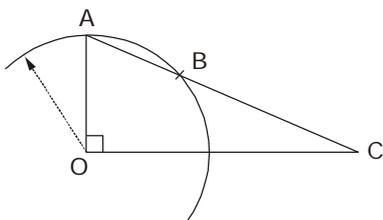


07. P y T son puntos de tangencia.
 $r = 5$ u y $AT = 9$ u. Calcule "x".

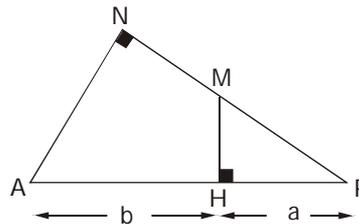


08. En un triángulo obtusángulo ABC obtuso en "B", por el punto medio "M" de \overline{AC} se traza \overline{MP} perpendicular a \overline{BC} . Calcule MP, si: $AB = 6$ u; $BP = 3$ u y $PC = 7$ u.

09. En el gráfico : $AB = 6$ cm y $BC = 8$ cm.
 Calcule la distancia de "O" a \overline{AC} .



10. Calcule "AN", si : $MN = MP$.

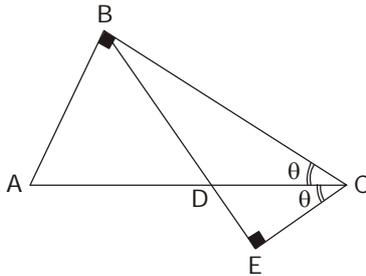


Practicemos :

12. Los lados de un triángulo miden 8, 15 y 16 cm. ¿Cuánto se debe quitar a cada lado para que resulte un triángulo rectángulo?
13. La suma de los cuadrados de los lados de un triángulo rectángulo es 200 cm^2 .
 Calcule la longitud de la hipotenusa.
14. Calcule la longitud de la altura relativa a la hipotenusa, si los catetos del triángulo rectángulo miden 6 y 8 cm.

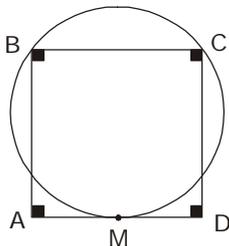
15. En un triángulo rectángulo, los catetos miden 24 u y 18 u. Calcule la longitud de la altura de dicho triángulo.

16. Calcule BD, si : $AD = 8 \text{ cm}$ y $DC = 10 \text{ cm}$.



17. Calcule la longitud del inradio de un triángulo isósceles; si su perímetro es igual a 98 cm y su base es igual a 40 cm.

18. En la figura, ABCD es un cuadrado de lado que mide 16, siendo "M" punto medio de \overline{AD} . Calcule la longitud del radio de la circunferencia.



19. Los lados de un triángulo miden 4 u, 5 u y 6 u. ¿Cuánto hay que disminuir a cada lado para que el nuevo triángulo sea triángulo rectángulo?

20. El radio de la circunferencia inscrita en un trapecio isósceles de bases "a" y "b" es :

Problemas propuestos

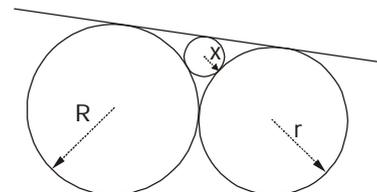
21. En un triángulo PQR ($m\angle Q = 90^\circ$), los catetos PQ y QR miden 30 m y 20 m respectivamente. Calcule la distancia del vértice Q a la mediana RM.

- a) 8 m b) 9 m c) 10 m
d) 11 m e) 12 m

22. En una circunferencia de 5 m de radio, se traza una cuerda AB y sobre ésta se ubica un punto M, de modo que : $AM = 3 \text{ m}$ y $MB = 5 \text{ m}$. Calcule a qué distancia está M del centro.

- a) $\sqrt{10} \text{ m}$ b) $\sqrt{11} \text{ m}$ c) $\sqrt{13} \text{ m}$
d) $\sqrt{15} \text{ m}$ e) 3 m

23. Calcule "x", si : $R = 16 \text{ u}$ y $r = 4 \text{ u}$.



- a) $16/9 \text{ u}$ b) $15/8 \text{ u}$ c) 2 u
d) $3/2 \text{ u}$ e) $8/3 \text{ u}$

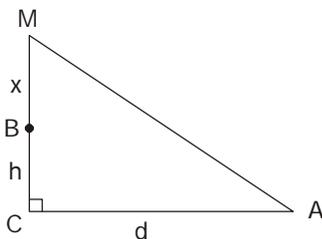
24. El lado de un cuadrado ABCD, inscrito en una circunferencia, mide 4 u. "M" es un punto del arco \widehat{AB} , de modo que : MD = 5 u. Calcule MB.

- a) $\sqrt{6}$ u b) $\sqrt{5}$ u c) $2\sqrt{2}$ u
 d) $\sqrt{7}$ u e) 3 u

25. Dado un rectángulo ABCD, AD = 30 cm y AB = 25 cm, calcule el radio de la circunferencia tangente a \overline{BC} y que contiene a A y D.

- a) 16 cm b) 17 cm c) 18 cm
 d) 20 cm e) 21 cm

26. En un triángulo rectángulo de la figura, la suma de las longitudes BM y MA es igual a la suma de las longitudes BC y CA. Si : BM = x, BC = h y CA = d. Calcule "x".



- a) d - h b) $\frac{hd}{2h+d}$
 c) $\frac{d}{2}$ d) $\sqrt{h^2 + d^2} - h$
 e) $h+d - \sqrt{2}d$

27. Se tiene un cuadrado ABCD cuyo lado tiene una longitud igual a "L". Se traza una circunferencia que, pasando por los vértices B y C, es tangente al lado \overline{AD} . Calcule la longitud del radio de la circunferencia.

- a) $4L/7$ b) $5L/8$ c) $3L/5$
 d) $2L/3$ e) $8L/10$

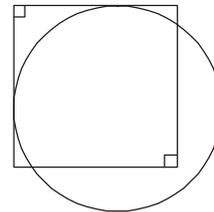
28. En un pentágono ABCDE, los lados \overline{AE} y \overline{DE} miden 16 u y 8 u respectivamente y :
 $m \sphericalangle A + m \sphericalangle B + m \sphericalangle C + m \sphericalangle D = 480^\circ$. Calcule la distancia del vértice E a la diagonal \overline{AD} .

- a) $4\sqrt{3}$ u b) 8 u c) 10 u
 d) 12 u e) $3\sqrt{3}$ u

29. Sea ABC un triángulo rectángulo cuyos catetos miden: AB = 40 u y AC = 30 u. Se traza la altura \overline{AD} relativa a la hipotenusa. Calcule la diferencia entre los perímetros de los triángulos ABD y ACD.

- a) 24 u b) 30 u c) 48 u
 d) 20 u e) 26 u

30. Una circunferencia es tangente a dos lados adyacentes de un cuadrado y divide a cada uno de los otros lados en dos segmentos cuyas longitudes son 2 cm y 23 cm. Calcule la longitud del radio de la circunferencia.



- a) 15 cm b) 16 cm c) 17 cm
 d) 14 cm e) 19 cm

31. Las medianas de un triángulo rectángulo ABC trazadas a partir de los vértices de los ángulos agudos tienen longitudes de 5 m y $\sqrt{40}$ m. Calcule la longitud de la hipotenusa.

- a) 15,0 m b) 13,58 m c) 12,60 m
 d) 10,1 m e) 7,21 m

32. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura \overline{BH} ; de tal manera que : AH = 5 u y HC = 7 u. Calcule las longitudes de los catetos.

- a) $2\sqrt{13}$ u y $2\sqrt{15}$ u b) $2\sqrt{15}$ u y $2\sqrt{21}$ u
 c) $3\sqrt{7}$ u y $3\sqrt{5}$ u d) $2\sqrt{5}$ u y $2\sqrt{7}$ u
 e) $7\sqrt{2}$ u y $5\sqrt{2}$ u

32. En un triángulo rectángulo, las proyecciones de los dos catetos están en relación de 4 a 5. Calcule la relación de dichos catetos.

- a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{2}{\sqrt{5}}$ c) $\frac{3}{5}$
 d) $\sqrt{5}$ e) $\frac{4}{5}$

33. En un romboide ABCD, si :
 BC = 8 u, CD = 5 u y AC = 10 u.
 Calcule la proyección de \overline{BD} sobre \overline{AC} .

- a) 1,9 u b) 2,9 u c) 3,9 u
 d) 4,9 u e) 5,9 u

34. Sea ABC un triángulo rectángulo recto en B, cuyas medianas \overline{BM} y \overline{CN} son perpendiculares entre sí. Calcule el valor de \overline{AB} , si : BC = 6.

- a) $3\sqrt{2}$ dm b) $2\sqrt{3}$ dm c) $6\sqrt{2}$ dm
 d) $6\sqrt{3}$ dm e) 8 dm

35. En un trapecio ABCD, $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$, $AB = 5$ u, $BC = 6$ u, $CD = 7$ u y $AD = 10$ u.
 Calcule : $AC^2 + BD^2$.

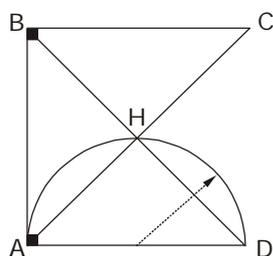
- a) 192 u² b) 193 u² c) 194 u²
 d) 195 u² e) 196 u²

36. Calcule la longitud de la hipotenusa \overline{AB} de un triángulo rectángulo ABC, sabiendo que : $AD = 2$ dm, $CD = 7$ dm.

$m \angle DBC = m \angle BAD$ y que D pertenece a \overline{AC} .

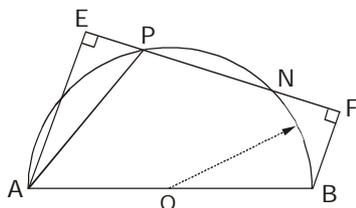
- a) 4,5 dm b) 6,5 dm c) $4\sqrt{3}$ dm
 d) 10 dm e) 12 dm

37. Calcule AD, si :
 $CH = 2$ dm y $HA = 6$ dm.



- a) $2\sqrt{3}$ dm b) $4\sqrt{3}$ dm c) $8\sqrt{3}$ dm
 d) 10 dm e) 12 dm

38. En el gráfico, $AE = 80$ u y $FN = 18$ u. Calcule AP.



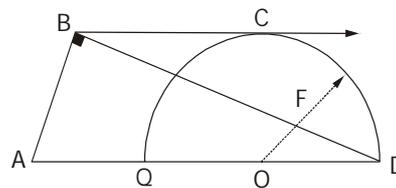
- a) 100 u b) $18\sqrt{26}$ u c) 92 u
 d) $15\sqrt{33}$ u e) 82 u

39. \overline{AB} y \overline{CD} son dos cuerdas paralelas que se encuentran en una circunferencia de radio "r"; de modo que, la distancia entre dichas cuerdas, es igual a 27 u.

Calcule "r", si : $AB = 48$ u y $CD = 30$ u.

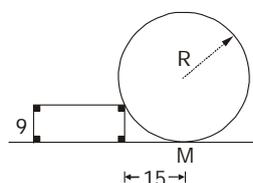
- a) 36 u b) 34 u c) 32 u
 d) 25 u e) 28 u

40. En el gráfico, calcule BC.
 Si : $AB = 5$ u, $AD = 13$ u, $AQ = QD$.
 (C : punto de tangencia).



- a) $4\sqrt{2}$ u b) $5\sqrt{2}$ u c) $6\sqrt{2}$ u
 d) $7\sqrt{2}$ u e) $8\sqrt{2}$ u

41. Calcule "R" en el gráfico mostrado.
 (M : punto de tangencia).

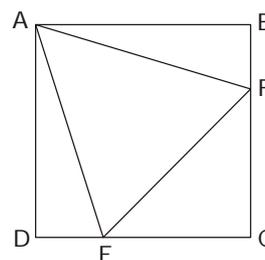


- a) 15 u b) 16 u c) 17 u
 d) 18 u e) 20 u

42. El segmento perpendicular a un diámetro desde un punto de la circunferencia mide 12 pulgadas. Si uno de los segmentos que se determina, en el diámetro, mide 4 pulgadas. Calcule la longitud del radio de la circunferencia.

- a) 5 pulg b) 20 pulg c) 10 pulg
 d) 15 pulg e) 25 pulg

43. Dado el cuadrado de lado que mide "a", ¿Cuál debe ser el valor de DE, para que el triángulo AEF sea equilátero?



- a) $a(2\sqrt{3})$ u b) $a(\sqrt{3} + 1)$ u
 c) $a(\sqrt{2} - 1)$ u d) $\frac{1}{3}a$ u
 e) $a(2 - \sqrt{3})$ u

44. Se tiene un triángulo ABC donde la media del ángulo A es dos veces la media del ángulo B.

Si : $AC = 4 u$ y $AB = 5 u$. Calcule : $\frac{BC}{AC}$.

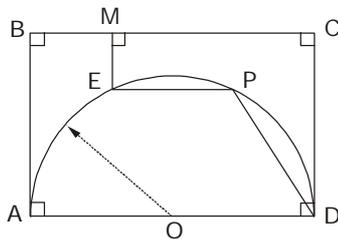
- a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{6}{5}$
 d) $\frac{3}{2}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{2}$

45. Dos circunferencias de centros A y B se intersectan en los puntos C y D. La tangente a la circunferencia de centro A trazada por el punto C pasa por el punto B y la tangente trazada por el punto C a la circunferencia de centro B pasa por el punto A. Si los diámetros de las circunferencias tienen las longitudes de $6\sqrt{5}$ cm y $12\sqrt{5}$ cm.

Calcule CD.

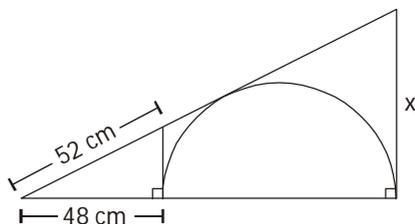
- a) 11 cm b) 12 cm c) 13 cm
 d) 14 cm e) 15 cm

46. En el gráfico : $EM = 8 u$, $MC = 25 u$ y $AB = 18 u$. $\overline{EP} \parallel \overline{AD}$. Calcule PD.



- a) $2\sqrt{21} u$ b) 12 u c) $2\sqrt{29} u$
 d) 11 u b) $3\sqrt{15} u$

47. Calcule "x" en el gráfico :



- a) 52 cm b) 48 cm c) 47 cm
 d) 46 cm e) 45 cm

48. En un triángulo rectángulo ABC, recto en B, se traza la altura \overline{BH} ; de tal manera que: $HA = 3 u$ y $HC = AB$. Calcule BC.

- a) 5 u b) $\sqrt{6(4+\sqrt{5})} u$ c) 6 u
 d) $\sqrt{3} + 1u$ e) $3\sqrt{2+\sqrt{5}} u$

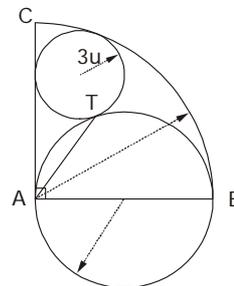
49. Se tiene el trapecio rectángulo ABCD, $m\angle A = m\angle B = 90^\circ$, $AB = 60 u$, $BC = 62 u$ y $AD = 73 u$. Calcule CD.

- a) 61 u b) 63 u c) 65 u
 d) 68 u e) 75 u

50. Las diagonales AC y BD de un trapecio ABCD miden 5 u y 7u, respectivamente. Calcular la longitud de la mediana, si: $\overline{AC} \perp \overline{BD}$.

- a) 3 u b) $\frac{\sqrt{74}}{2} u$ c) 4 u
 d) $\frac{\sqrt{45}}{2} u$ e) 5 u

51. En el gráfico, calcule AT. (T punto de tangencia).

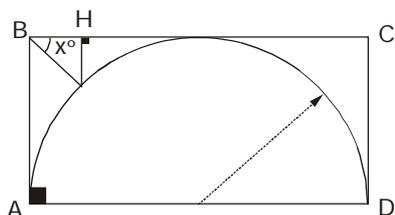


- a) $6\sqrt{2} u$ b) $\frac{12\sqrt{21}}{7} u$ c) $9\sqrt{2} u$
 d) $\frac{5\sqrt{17}}{3} u$ e) $6,5\sqrt{2} u$

52. Sea ABCD un cuadrado de 16 dm de lado. Con centros en A y D describa circunferencias congruentes y de radio \overline{AD} . Luego, el radio de la circunferencia tangente exteriormente a éstas y al lado \overline{BC} mide :

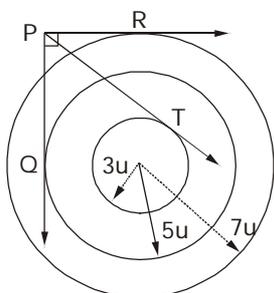
- a) 1 dm b) 2 dm c) 3 dm
 d) 4 dm e) 5 dm

53. ABCD es un rectángulo.
BH = 2 u, HC = 8 u. Calcule "x".



- a) 30° b) 53°/2 c) 37°/2
d) 53° e) 36°

54. En el gráfico, calcule PT.
(T, Q y R son puntos de tangencia).

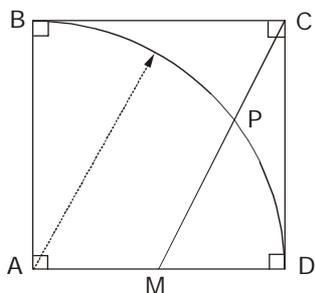


- a) 8 u b) $6\sqrt{2}$ u c) 9 u
d) $\sqrt{65}$ u e) 10 u

55. Se tiene un trapecio isósceles, una de sus diagonales mide $2\sqrt{79}$ unidades y el producto de las longitudes de sus bases es igual a $216 u^2$. Calcule la longitud de uno de los lados no paralelos.

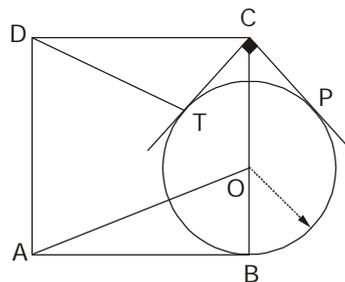
- a) $\sqrt{79}$ u b) 12 u c) $6\sqrt{2}$ u
d) 10 u e) $4\sqrt{5}$ u

56. En el gráfico : AB = 8 u. Calcule PM. (AM = MD)



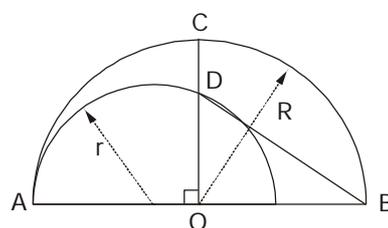
- a) 1 u b) $6\sqrt{5}$ u c) $\frac{12}{5}\sqrt{5}$ u
d) $3\sqrt{5}$ u e) $12\sqrt{5}$ u

57. En el gráfico mostrado, ABCD es un cuadrado. Calcule AO, si : DT = 3 m. (P y T punto de tangencia).



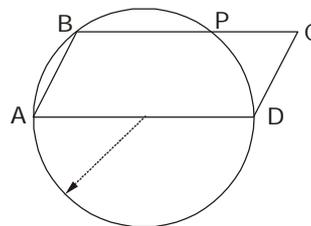
- a) 3 m b) 4 m c) 5 m
d) $5\sqrt{2}$ m e) $3\sqrt{2}$ m

58. Calcule BD, si : OA = OB y el producto de radios es $32 m^2$.



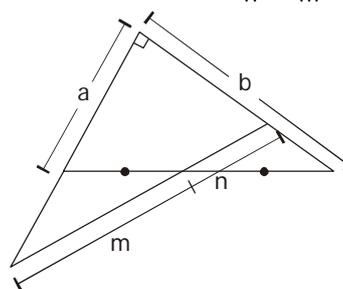
- a) 6 m b) 4 m c) 9 m
d) 8 m e) 7 m

59. En el gráfico, ABCD es un romboide, PB = 10 u y PC = 8u . Calcular la longitud de la diagonal BD.



- a) 12 u b) $8\sqrt{2}$ u c) 15 u
d) $4\sqrt{6}$ u e) $6\sqrt{7}$ u

60. En el gráfico mostrado, calcule : $\frac{a^2}{n^2} + \frac{b^2}{m^2}$



- a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

Claves

21.	<i>e</i>
22.	<i>a</i>
23.	<i>a</i>
24.	<i>d</i>
25.	<i>b</i>
26.	<i>b</i>
27.	<i>b</i>
28.	<i>b</i>
29.	<i>a</i>
30.	<i>c</i>
31.	<i>e</i>
32.	<i>b</i>
33.	<i>b</i>
34.	<i>c</i>
35.	<i>c</i>
36.	<i>a</i>
37.	<i>e</i>
38.	<i>e</i>
39.	<i>d</i>
40.	<i>c</i>

41.	<i>c</i>
42.	<i>b</i>
43.	<i>e</i>
44.	<i>d</i>
45.	<i>b</i>
46.	<i>c</i>
47.	<i>e</i>
48.	<i>e</i>
49.	<i>a</i>
50.	<i>b</i>
51.	<i>c</i>
52.	<i>a</i>
53.	<i>b</i>
54.	<i>d</i>
55.	<i>d</i>
56.	<i>c</i>
57.	<i>e</i>
58.	<i>d</i>
59.	<i>e</i>
60.	<i>d</i>