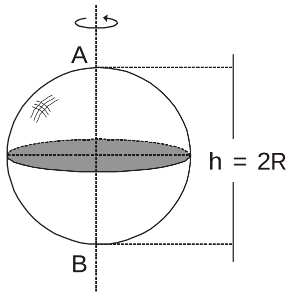
Capítulo

21 ESFERA II

ESFERA SÓLIDA

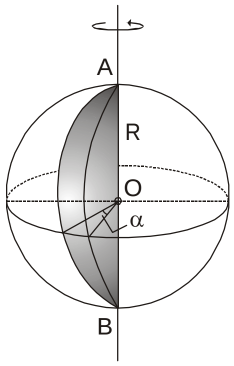
Es el sólido generado por un semicírculo cuando gira una revolución completa alrededor de su diámetro.



$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

CUÑA ESFÉRICA

Es una porción de la esfera sólida limitado por 2 semicírculos que tienen el mismo diámetro.



$360º \rightarrow \frac{4}{3}\pi R^3$

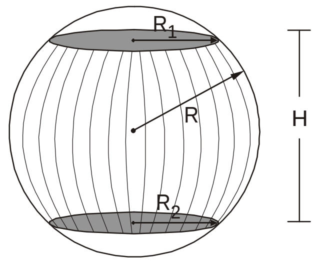
$\alpha \rightarrow$ Cuña

$$\text{Cuña} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3.\alpha}{360º}$$

$$V_{\text{Cuña}} = \frac{\pi R^3 \alpha}{270°}$$

SEGMENTO ESFÉRICO

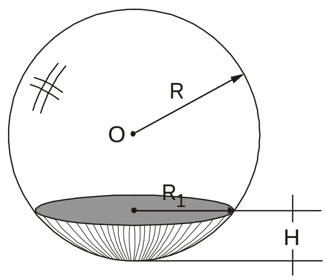
Es el volumen determinado por la zona esférica y dos círculos paralelos en la esfera.



$$V = \frac{\pi H}{2}\left(\frac{H^2}{3} + R_1^2 + R_2^2\right)$$

SEGMENTO ESFÉRICO DE UNA BASE

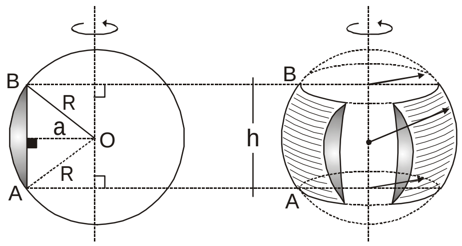
Parte de la esfera limitada por el casquete esférico y su círculo menor correspondiente.



$$V = \frac{\pi H}{2}\left(\frac{H^2}{3} + R_1^2\right)$$

ANILLO ESFÉRICO

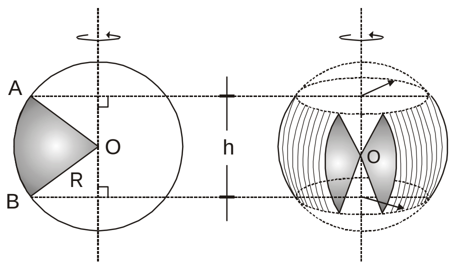
Es el sólido generado por la rotación de un segmento circular cuando gira alrededor de un eje coplanar que pasa por el centro de la circunferencia a que pertenece el segmento circular.



$$\text{Anillo} = \frac{1}{6}\pi\,\overline{AB}^2.h$$

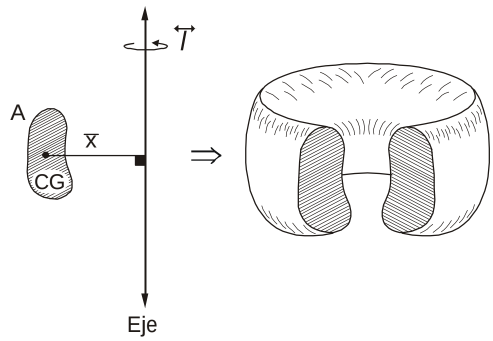
SECTOR ESFÉRICO

Es el sólido generado por un sector circular cuando gira alrededor de un eje coplanar que pasa por su vértice.



$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h$$

TEOREMA DE PAPPUS GULDING



A = área de la región plana.
CG = centro de gravedad del área "A".
x = distancia del centro de gravedad del área "A" al eje.
V = $2\pi x A$.

Test de aprendizaje preliminar

01. Hallar el volumen de la esfera circunscrita a un cono de revolución que tiene 6u de radio y 8u de altura.

02. Hallar el volumen de una esfera circunscrita a un cilindro de revolución que tiene $96\pi u^3$ de volumen y además la relación entre el radio de la base y la altura es de 2 a 3.

03. Si el volumen de un cono de revolución equilátero es "V", hallar el volumen de la esfera inscrita.

04. Hallar el volumen de un cono equilátero inscrito en una esfera de volumen $96\pi u^3$.

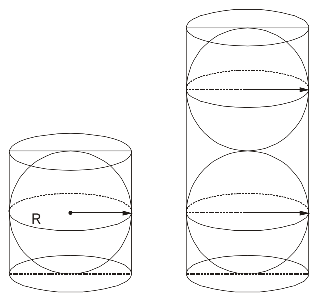
05. Hallar el volumen de la esfera inscrita en un cilindro circular recto de $90\pi m^3$ de volumen.

06. Un triángulo equilátero cuyo lado mide "a" metros, gira alrededor de uno de sus lados. Hallar el volumen del sólido engendrado.

07. Una esfera se encuentra inscrita en un cilindro. Si el área de la esfera más el área total del cilindro es $90\pi u^2$, hallar el volumen de la esfera.

08. El volumen de una cuña esférica de 45º es $\frac{32}{3}\pi u^3$. Calcular el área total de la cuña.

09. En la figura mostrada, calcular la razón de volúmenes de los cilindros de revolución, si el volumen de la esfera de mayor radio es igual a la suma de los volúmenes de las otras dos esferas de menor radio.



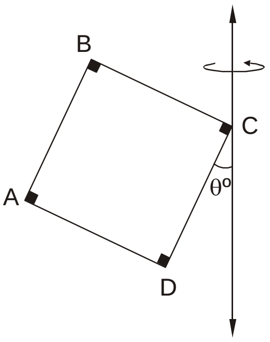
10. Calcular el volumen de una cuña esférica, si el área del huso esférico de 30º es de 108 πu^2.

Practiquemos :

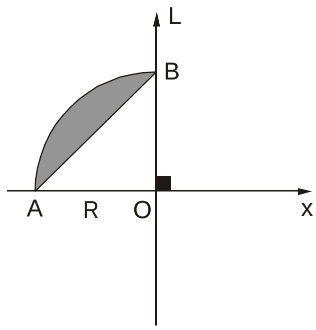
11. Calcular el volumen del sólido formado por un círculo de radio igual a 1u, cuando gire alrededor de una recta tangente a dicho círculo.

12. Determinar la distancia del centro de gravedad de un cuarto de círculo AOB hacia $\overline{OB}$, siendo :
AO = OB = 6 π u.

13. Calcular el volumen que genera el cuadrado de lado cuya longitud es $\sqrt{6}$ u al girar 360º alrededor del eje.
Dato : θº = 15º.

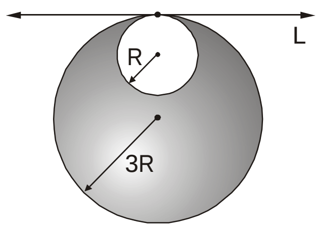


14. Hallar el volumen del sólido generado por el segmento circular, cuando gira 360º alrededor de la recta "L" y R = 2u.

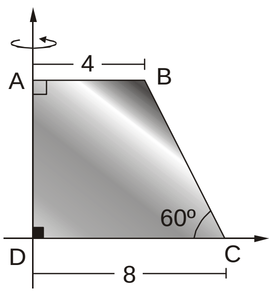


15. Hallar el volumen de una cuña esférica de 30º, si su área total es 12 π .

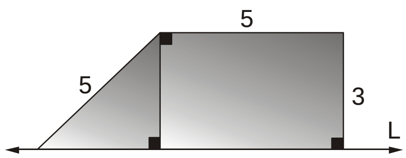
16. Calcular el volumen generado por la región sombreada al girar 360º alrededor de "L".



17. Calcular la relación de volúmenes que hay entre los sólidos generados cuando el trapecio (región) gira 360º alrededor de $\overline{AC}$ y $\overline{CD}$.



18. Al rotar la región sombreada un ángulo de 360º alrededor de la recta "L", se obtiene un sólido cuyo volumen es :



19. Un hexágono regular de lado "a" gira 360º alrededor de uno de sus lados.
El volumen del sólido que se genera es :

20. Hallar el volumen de una esfera inscrita en un octaedro regular cuya arista mide "a".

Problemas propuestos

21. El volumen de un tetraedro regular es 27 u^3.
Calcular el volumen comprendido entre la esfera inscrita y circunscrita al tetraedro.

a) $24\sqrt{2}\ \pi$ b) $28\sqrt{2}\ \pi$ c) $32\sqrt{2}\ \pi$
d) $\frac{39}{4}\sqrt{2}\ \pi$ e) $39\sqrt{3}\,\pi$

22. Hallar el volumen de una cuña esférica trazada para una esfera de 24 m^3 de volumen y con ángulo que mide 30º.

a) 5 b) 4 c) 3
d) 2 e) 1

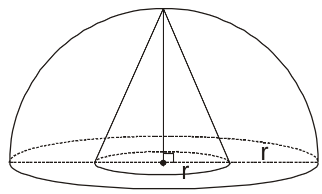
23. Se tiene una cuña esférica de 36 πu^3 y 45º de ángulo diedro. Hallar el radio de dicha cuña.

a) 4 u b) 9 u c) 6 u
d) 8 u e) 3 u

24. Hallar el volumen de un segmento esférico de una base, si su altura es 1 u y el área de su casquete mide $2\pi u^2$.

a) $\frac{4}{5}\pi u^3$ b) $\frac{2}{3}\pi$ c) $\frac{6}{13}\pi$
d) $\frac{5}{13}\pi$ e) $\frac{2}{13}\pi$

25. En la figura, el volumen del cono es $18\,\pi cm^3$. Calcular el volumen de la semiesfera.



a) $36\,\pi cm^3$ b) $42\,\pi$ c) $72\,\pi$
d) $120\,\pi$ e) $144\,\pi$

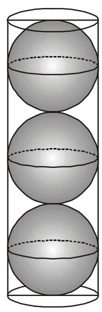
26. Calcular el volumen de una esfera cuya diferencia de áreas entre la superficie esférica y el círculo máximo es $9\,\pi\ u^2$.

a) $18\,\pi\ u^3$ b) $4\sqrt{3}\ \pi$ c) $12\,\pi$
d) $6\sqrt{3}\ \pi$ e) $8\,\pi$

27. En un recipiente cónico (circular recto), lleno de agua se introducen una esfera de radio 3m y otra de diámetro 24 m, quedando exactamente la mitad de ésta fuera del cono. Las esferas son tangentes entre sí y quedan ajustados a la superficie lateral del cono. Calcular el volumen de agua que aún queda en el recipiente.

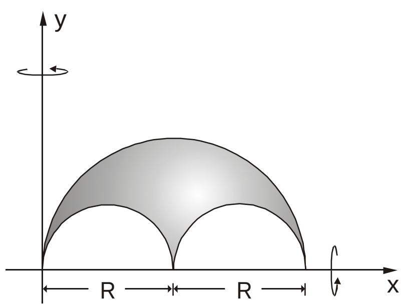
a) 150π b) 330π c) 312π
d) 348π e) 300π

28. En un cesto, se han colocado tres pelotas de igual radio y el volumen de una de ellas es $(\frac{32}{3})\ \pi$. Hallar el volumen del cesto.



a) 16π b) 22π c) 48π
d) 30π e) 32π

29. Del gráfico, calcular la relación de volúmenes que genera al rotar 360º el área de la región sombreada sobre los ejes "y", "x".

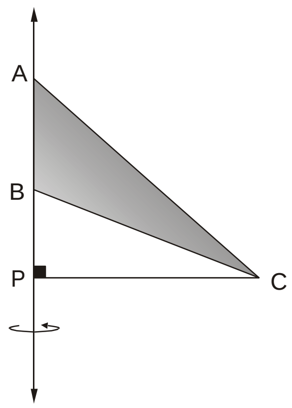


a) $\pi/2$ b) $\pi/3$ c) $\pi/4$
d) $\pi/6$ e) $\pi/8$

30. Cuatro esferas del mismo radio de longitud "r" están en un plano, de manera que están en contacto una con otra. Una quinta esfera del mismo radio se coloca sobre ellas en el centro. Hallar la distancia entre el punto superior de la quinta esfera y el plano.

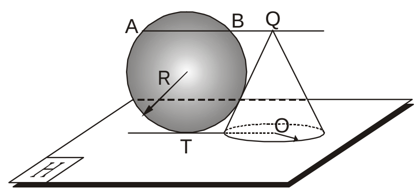
a) $(2+\sqrt{2})r$ b) $(2-\sqrt{2})r$ c) $(1+\sqrt{2})r$
d) $(1-\sqrt{2})r$ e) $\sqrt{2}\,r$

31. En la figura : AB = PC = 6.
El volumen del sólido de revolución que se obtiene al rotar el triángulo ABC alrededor de la recta "L" es :



a) 108π b) 72π c) 60π
d) 27π e) 24π

32. En la figura, $\overline{AB}\,//\,\overline{OT}$, $AB = R\sqrt{3}$, el volumen de la esfera es $32\sqrt{3}\,\pi$. Calcular el volumen del cono equilátero. (T es punto de tangencia).



a) $18\sqrt{3}\,\pi$ b) $3\sqrt{3}\,\pi$ c) $9\sqrt{3}\,\pi$
d) $12\sqrt{3}\,\pi$ e) $15\sqrt{3}\,\pi$

33. Se tiene un cono equilátero de altura 4 u, tomando como diámetro dicha altura se construye una esfera. Calcular el volumen del segmento esférico mayor determinado.

a) 8π b) 6π c) 9π
d) 12π e) 15π

34. Los lados de un triángulo miden 13, 14 y 15. Calcular el volumen del sólido generado por dicha región triangular al rotar 360º, sobre el lado intermedio.

a) 564π b) 672π c) 720π
d) 620π e) 648π

35. Hallar el volumen de un segmento esférico de una sola base conociendo que el área de su casquete esférico es cuatro veces el área de la base y además el radio de la esfera es $4\sqrt{3}$ u .

a) $230\pi\sqrt{3}\ u^3$ b) $140\,\pi\sqrt{3}$
c) $225\,\pi\sqrt{3}$ d) $216\sqrt{3}$
e) $245\,\pi\sqrt{3}$

36. Se tiene un cubo, inscrito en una cuña, de tal forma que dos de sus caras consecutivas están contenidas en los semicírculos máximo que limitan la cuña. Calcular la razón de las áreas de la superficie esférica inscrita en dicho cubo y el huso esférico correspondiente a la cuña.

a) 3/2 b) 5/3 c) 9/4
d) 6/5 e) 7/3

37. Calcular el volumen del anillo esférico limitado por la superficie lateral de un cilindro de revolución inscrito en una esfera y por la superficie de la esfera. Sabiendo, además que el cilindro y el anillo esférico son sólidos equivalentes. El área de la superficie esférica es 48 πu^2.

a) $11{,}50\pi\sqrt{3}\,u^3$ b) $13{,}48\pi\sqrt{5}$
c) $11{,}52\pi\sqrt{5}$ d) $13{,}22\pi\sqrt{2}$
e) $12{,}28\pi\sqrt{3}$

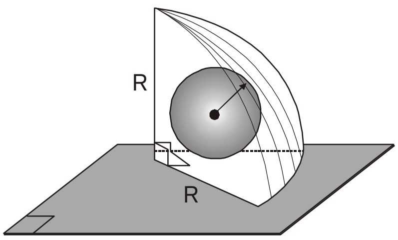
38. Calcular el volumen de una esfera tangente a las aristas de un tetraedro regular de arista 8u.

a) $\frac{76}{3}\pi\sqrt{2}\,u^3$ b) $\frac{49}{3}\pi\sqrt{2}$
c) $\frac{64}{3}\pi\sqrt{2}$ d) $\frac{61}{3}\pi\sqrt{2}$
e) $\frac{56}{3}\pi\sqrt{2}$

39. En un plano, se encuentran tres esferas iguales de radio R; cada una de las cuales hace contacto con otra de ellas. Una cuarta esfera hace contacto con cada una de las tres esferas dadas y con el plano. Hallar el radio de la cuarta esfera.

a) $\frac{R}{2}$ b) $\frac{R}{3}$ c) $\frac{R}{4}$
d) $\frac{2R}{5}$ e) $\frac{R}{6}$

40. Hallar el volumen de la esfera inscrita en un octavo de esfera, cuyo radio mide $2(\sqrt{3}+1)u$.



a) 16π b) 32π c) $\frac{16}{3}\pi$
d) $\frac{32}{3}\pi$ e) $\frac{64}{3}\pi$

41. Hallar la longitud de lugar geométrico de los baricentros de las secciones de una esfera por planos que pasan por una recta "L", la cual es tangente a la esfera de radio "R".

a) πR b) $2\pi R$ c) $\pi\frac{R}{2}$
d) $3\pi\frac{R}{2}$ e) $3\pi R$

42. Hallar la razón del volumen de una esfera al volumen del cono recto circunscrito a esta esfera, si la superficie total del cono es "n" veces la superficie de la esfera.

a) $\frac{1}{n}$ b) $\frac{2}{n}$ c) $\frac{3}{4}n$
d) $\frac{4}{3}n$ e) $\frac{6}{5}n$

43. Se tiene un tetraedro ABCD, en donde el volumen es 100 u^3; el área total es 130 u^2 y el área de la cara ABC es 15 u^2. Hallar el volumen de la esfera ex-inscrita relativa a la cara ABC.

a) $32\pi u^3$ b) 25π c) $\frac{28}{3}\pi$
d) 36π e) 64π

44. Un semicírculo de diámetro 12u gira 120º alrededor del diámetro. Hallar el volumen de la cuña esférica.

a) $84\pi u^3$ b) 96π c) 104π
d) 78π e) 80π

45. La altura y diámetro de un cono de revolución son iguales al radio de una esfera de $4u^3$ de volumen. Calcular el volumen del cono.

a) $\frac{1}{3}u^3$ b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{2}{5}$
d) $\frac{1}{5}$ e) $\frac{2}{3}$

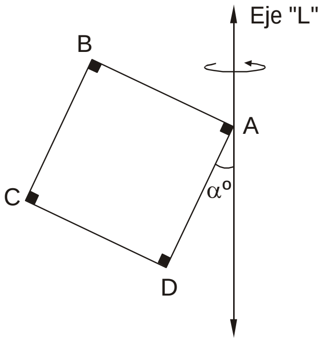
46. Se tiene una región hexagonal regular de perímetro igual a 24. Calcular el máximo volumen generado al girar dicha región sobre una recta coplanar que contiene uno de sus vértices.

a) $120\sqrt{3}\pi$ b) $172\sqrt{3}\pi$ c) $192\sqrt{3}\pi$
d) $148\sqrt{3}\pi$ e) $162\sqrt{3}\pi$

47. Calcular el volumen de la semiesfera inscrita en un tronco de cilindro recto, de modo que la base circular del tronco de cilindro coincide con el círculo máximo de la semiesfera. Además, se sabe que la generatriz menor y el volumen de dicho tronco es 4 unidades y $120\pi u^3$, respectivamente.

a) $32\sqrt{6}\pi u^3$ b) 64π c) $24\sqrt{3}\pi$
d) 72π e) $36\sqrt{3}\pi$

48. Determinar la medida del ángulo "α" de modo que el volumen generado al rotar la región cuadrada en torno del "L", sea el mayor posible.



a) 15º b) 30º c) 45º
d) 60º e) 90º

49. Una esfera de radio igual 1,5 u tiene el mismo volumen que un cono circular recto, cuyo radio de la base es 0,75u. Hallar la altura del cono.

a) 24 u b) 18 c) 15
d) 10 e) 12

50. Hallar la relación de los volúmenes entre las esferas inscrita y circunscrita en un mismo hexaedro regular.

a) $\frac{\sqrt{3}}{6}$ b) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{9}$
d) $\frac{\sqrt{6}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{9}$

51. Hallar la longitud del radio de la semiesfera inscrita en el tetraedro regular cuya arista mide 1 m.

a) $\frac{\sqrt{3}}{9}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{9}$
d) $\frac{\sqrt{6}}{3}$ e) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

52. Una esfera de área $144\,u^2$ es cortada por 2 planos que forman entre sí un ángulo diedro de 60º, de modo que la recta de intersección de los planos es tangente a la esfera y el plano bisectriz contiene un diámetro de la esfera. Hallar el volumen de la parte de la esfera comprendida en el ángulo diedro.

a) $288\pi\,u^3$ b) 198π c) 243π
d) 126π e) 264π

53. En una circunferencia de diámetro igual a $4\sqrt{3}$ dm, se traza la cuerda $\overline{BC}$ de modo que : mBC = 120º. Calcular el volumen del anillo esférico que se obtiene al girar 360º, el segmento circular BC, alrededor de un eje diametral paralelo a $\overline{BC}$.

a) $36\pi\,dm^3$ b) 27π c) 12π
d) 32π e) 72π

54. Calcular el volumen de la esfera tangente a las aristas PA, PB y PC de un tetraedro regular P-ABC, en los vértices A, B y C, respectivamente, siendo : $3\sqrt{3}\,u^2$ el área total del tetraedro.

a) $\sqrt{6}\,\pi\,u^3$ b) $2\sqrt{3}\,\pi$ c) 6π
d) 9π e) $3\sqrt{2}\,\pi$

55. Una alambre se enrolla de modo que forma una esfera, si la sección del alambre es de $\pi\,mm^2$ y el radio de la esfera formado es de 10 cm. Hallar la longitud del alambre, si el porcentaje de vacíos de la esfera es del 10%.

a) 1,2 km b) 3 c) 1
d) 1,6 e) 2,4

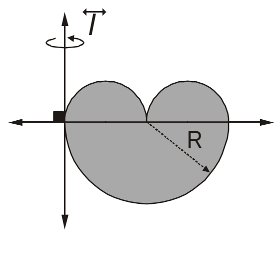
56. Se tiene una pirámide hexagonal regular por el centro de la base de dicha pirámide, se ha trazado un plano paralelo a una cara lateral. Hallar la relación entre el área de la sección determinada y el área lateral de la pirámide.

a) $\frac{5}{4}$ b) $\frac{5}{6}$ c) $\frac{10}{7}$
d) $\frac{2}{3}$ e) $\frac{5}{24}$

57. Se funde una bola de plomo de radio 5 cm, para obtener bolas cuyo radio sean de 1 cm cada una. ¿Cuántas bolas de plomo se obtendrán en el proceso?

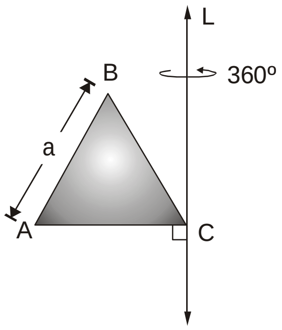
a) 50 b) 100 c) 150
d) 175 e) 125

58. Hallar el volumen generado, al rotar la siguiente superficie alrededor del eje $\overleftrightarrow{T}$.



a) $\frac{\pi^2R^3}{2}$ b) $\frac{3}{2}\pi^2R^3$ c) $\frac{3}{5}\pi R^3$
d) $\frac{4}{7}\pi R^3$ e) $\frac{2}{3}\pi R^3$

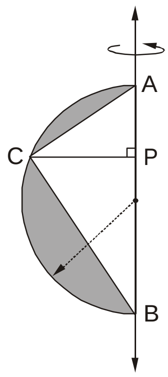
59. Hallar el volumen del sólido generado al girar el triángulo equilátero ABC, alrededor de L.



a) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{2}$ b) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{4}$ c) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{3}}{3}$

d) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{3}$ e) $\dfrac{\pi a^3\sqrt{6}}{2}$

60. Según el gráfico, siendo : AB = 5 y $(AP)^2+(PB)^2=12$. Calcular el volumen del sólido generado por la región sombreada al girar 360º en torno a la recta AB.



a) 5π b) 12π c) 10π

d) 9π e) 25π

Claves

21.	e
22.	d
23.	c
24.	b
25.	e
26.	b
27.	c
28.	c
29.	e
30.	a
31.	b
32.	c
33.	c
34.	b
35.	d
36.	c
37.	c
38.	c
39.	b
40.	d

41.	a
42.	a
43.	b
44.	b
45.	b
46.	c
47.	a
48.	c
49.	a
50.	c
51.	c
52.	b
53.	a
54.	a
55.	a
56.	a
57.	e
58.	b
59.	b
60.	c

Í N D I C E