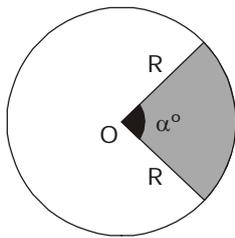
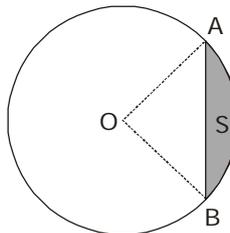


I. SECTOR CIRCULAR



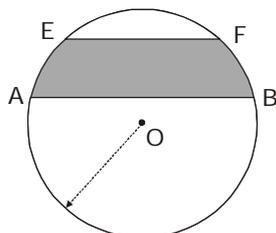
$$A_s = \frac{\alpha \pi R^2}{360^\circ}$$

II. SEGMENTO CIRCULAR



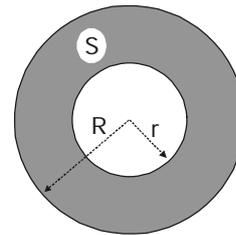
$$S = \triangle - \triangle$$

III. FAJA O ZONA CIRCULAR



Si:  $\overline{EF} \parallel \overline{AB}$

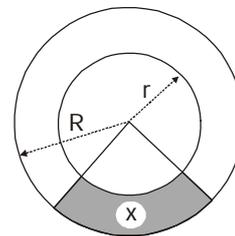
IV. CORONA O ANILLO CIRCULAR



$$S = \pi R^2 - \pi r^2$$

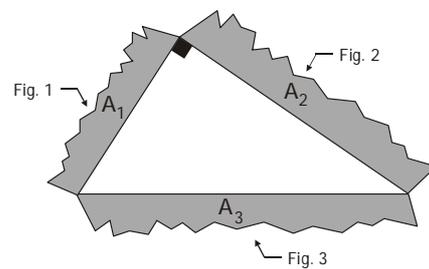
$$S = \pi(R^2 - r^2)$$

V. TRAPECIO CIRCULAR



$$X = \triangle - \triangle$$

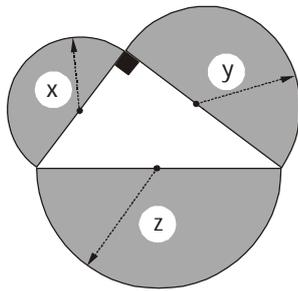
PROPIEDAD DE LAS FIGURAS SEMEJANTES



Si: fig. 1 ~ fig. 2 ~ fig. 3

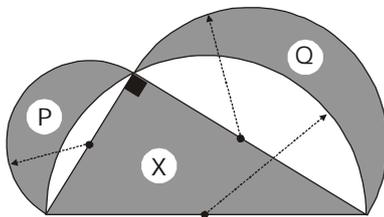
$$A_3 = A_1 + A_2$$

Caso Particular :



$$z = x + y$$

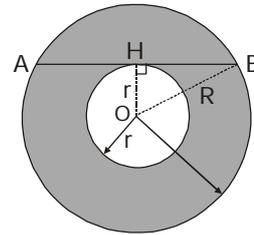
**TEOREMA DE LAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES**



$$X = P + Q$$

Observaciones :

\* En la corona circular



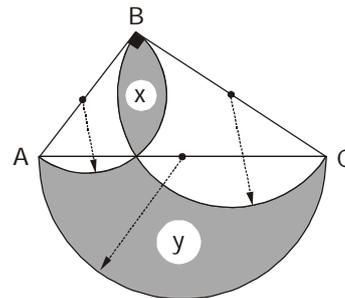
Δ OHB :

$$R^2 = r^2 + \left(\frac{AB}{2}\right)^2$$

$$R^2 - r^2 = \frac{AB^2}{4}$$

$$\therefore \text{Área} = \frac{\pi}{4} (AB)^2$$

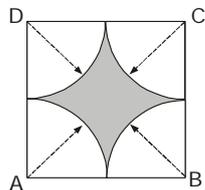
\* En el triángulo rectángulo



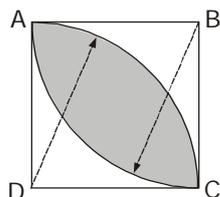
$$A_{ABC} = y - x$$

**Test de aprendizaje preliminar**

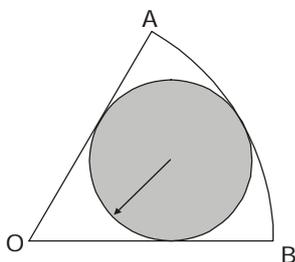
01. Calcular el área de la región sombreada, si :  
 $AB = 20$  cm. Además, ABCD es un cuadrado.



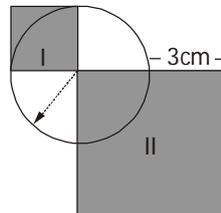
02. En la figura, calcular el área de la región sombreada, si :  
 $AB = 2$  m, siendo ABCD un cuadrado.



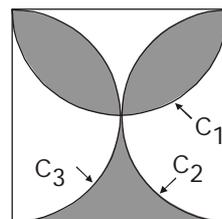
03. Hallar el área de la región sombreada, si :  
 $m \angle AOB = 60^\circ$  y  $OA = OB = 12$ .



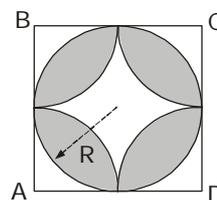
04. Si el área del círculo es  $9\pi$  cm<sup>2</sup>, ¿cuál es la suma de las áreas de las regiones cuadradas I y II?



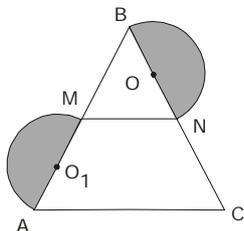
05. Si :  $C_1, C_2$  y  $C_3$  son semicírculos de radios iguales, entonces, el área de la figura sombreada en función de lado L del cuadrado, es:



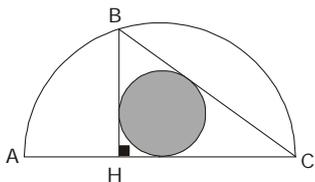
06. En la figura, el área de la región sombreada es: (ABCD: cuadrado).



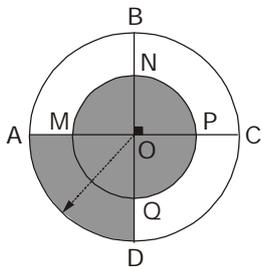
07. En la figura,  $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ ;  $BN = \frac{2}{3}(AM)$ ;  $BM = 12$ ,  $CN = 32$  y  $O, O_1$  son centros de las respectivas semicircunferencias. Hallar el área de la región sombreada.



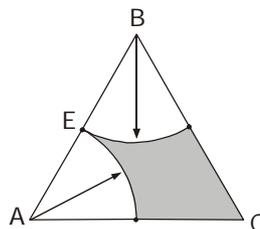
08. Hallar el área de la región sombreada, siendo  $\overline{AC}$  el diámetro.  $AB = 15$  y  $BC = 20$ .



09. En el círculo mayor, el diámetro es 4m. M, N, P y Q son puntos medios. Hallar el área de la región sombreada.



10. En el gráfico:  $AE = EB = 6$  dm, calcular el área de la región sombreada, si además:  $BC = AC = 12$  dm.



### Practicemos :

11. Un sector circular tiene un ángulo de  $60^\circ$  y 15m de radio. Hallar el área del círculo inscrito en el sector circular.
12. Si el área de un círculo se duplica al aumentar su radio en  $(\sqrt{2} - 1)$ ; hallar el radio original.
13. Un triángulo equilátero cuyo lado mide 4m; su región tiene igual área que un círculo cuyo radio mide R. ¿Cuál es el valor de R?

14. Hallar el área limitada por dos circunferencias tangentes interiormente sabiendo que la distancia entre sus centros es de  $10u$  y la suma de sus longitudes es de  $100u$ .

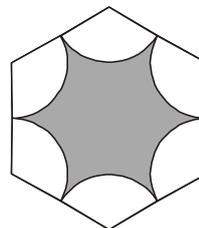
15. Las áreas que limitan dos circunferencias concéntricas son  $78,5 \text{ m}^2$  y  $28,26 \text{ m}^2$  respectivamente; se traza una cuerda a la circunferencia mayor que es tangente a la menor, entonces la longitud de esa cuerda es: (considerar que  $\pi = 3,14$ ).

16. Un sector circular tiene un área igual a  $25\pi \text{ cm}^2$  y representa el 4% del área del círculo. El 5% de la longitud de la circunferencia correspondiente en metros es:

17. Dado un triángulo equilátero ABC, de 4 cm de lado, hallar el área de la región comprendida entre la circunferencia circunscrita y la circunferencia inscrita a dicho triángulo.

18. Sean las regiones  $A_1$  y  $A_2$  limitadas por las circunferencias iguales tal que el área de  $A_1 \cap A_2$  es  $100 \text{ m}^2$  y el área de  $A_1 \cup A_2$  es  $400 \text{ m}^2$ . Entonces, el radio de las circunferencias iguales es:

19. Los vértices de un hexágono regular son los centros de 6 circunferencias congruentes y tangentes, (según muestra la figura). Calcular el área de la región sombreada en función de lado "a" del hexágono.



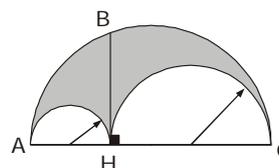
20. Hallar el área de faja circular cuyas bases son el lado del hexágono regular y del triángulo equilátero inscritos, respectivamente, además el radio del círculo es  $R = \sqrt{6}$ .

### Problemas propuestos

21. Dado los círculos  $C_1$  y  $C_2$ , con áreas  $a_1$  y  $a_2$ , respectivamente, si la longitud de la circunferencia  $C_2$  es igual al diámetro de  $C_1$ , el área  $a_2$  será:

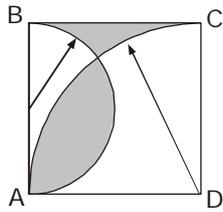
- a)  $\frac{a_1}{\sqrt{\pi}} u^2$       b)  $\frac{a_1^2}{\pi}$       c)  $\frac{a_1^2}{\pi^2}$   
 d)  $\frac{a_1}{\pi^2}$       e)  $\frac{a_1}{\pi}$

22. En la figura,  $\overline{AC}$  es diámetro. Hallar el área de la región sombreada. Si:  $BH = 6$ .



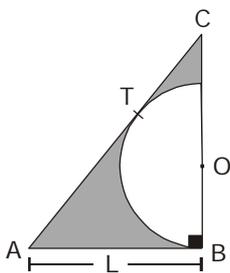
- a)  $6\pi$       b)  $9\pi$       c)  $12\pi$   
 d)  $18\pi$       e)  $20\pi$

23. Hallar la diferencia de las áreas de las regiones sombreadas, si el lado del cuadrado ABCD mide 4.



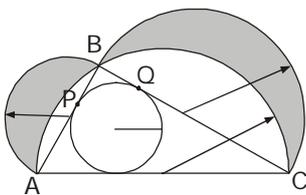
- a)  $3\pi - 8$     b)  $2(3\pi - 8)$     c)  $6\pi - 8$   
 d)  $6\pi + 8$     e)  $2(6\pi - 1)$

24. En la figura, hallar el área de la región sombreada, comprendida entre el triángulo ABC, recto en B, y la semicircunferencia, sabiendo que el arco BT es de  $120^\circ$ . (T : punto de tangencia).



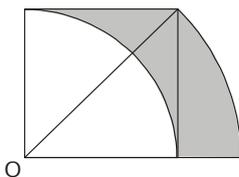
- a)  $(\frac{3\sqrt{3}-\pi}{6})L^2$     b)  $(\frac{2\sqrt{3}-\pi}{6})L^2$     c)  $(\frac{\sqrt{3}+\pi}{4})L^2$   
 d)  $(\frac{\pi-\sqrt{3}}{6})L^2$     e)  $(\frac{\pi+1}{4})L^2$

25. En la figura, hallar el área de la región sombreada, si:  $AP = 3$  y  $OQ = 4$ . P y Q : puntos de tangencia.



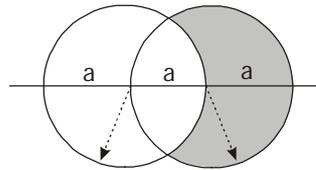
- a)  $2\sqrt{3}$     b) 12    c) 24  
 d)  $4\sqrt{3}$     e) 18

26. Hallar el área de la región sombreada comprendida entre dos circunferencias de centro "O" y un cuadrado con un vértice en "O" y lado 10 m.



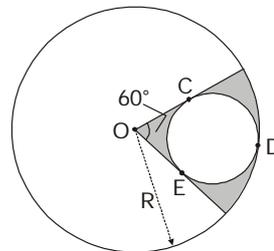
- a)  $50(1 - \frac{\pi}{4})m^2$     b)  $(45 + 25\frac{\pi}{4})$   
 c) 30    d)  $(50 + \pi)$   
 e) 50

27. Calcular el área de la región sombreada.



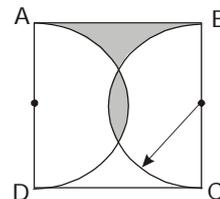
- a)  $\frac{\pi a^2}{3}$     b)  $\frac{\pi a^2}{3} + \sqrt{3} a^2$   
 c)  $(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})a^2$     d)  $(\frac{2\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2})a^2$   
 e)  $(\frac{2\pi}{3} - \sqrt{3})a^2$

28. Si: C, D y E son puntos de tangencia, hallar el área de la región sombreada.



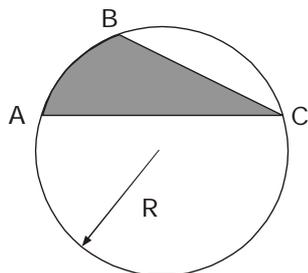
- a)  $\pi R^2 / 18$     b)  $\pi R^2 / 9$     c)  $\pi R^2 / 12$   
 d)  $\pi R^2 / 16$     e)  $\pi R^2 / 8$

29. En el rectángulo ABCD,  $\overline{AD}$  y  $\overline{BC}$  son diámetros. Hallar el área de la región sombreada, si :  $AB = 4\sqrt{3}$  y  $AD=8$ .



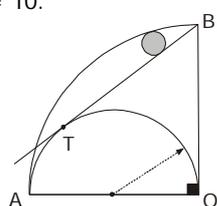
- a)  $2\sqrt{3}$     b)  $4\sqrt{3}$     c) 8  
 d)  $4 - 2\sqrt{3}$     e)  $8\sqrt{3}$

30. En la figura mostrada, si:  $m\widehat{AB}=72^\circ$  y  $m\widehat{BC}=54^\circ$ , hallar el área de la región sombreada. Si:  $R = \sqrt{5}$ .



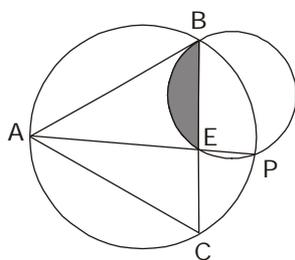
- a)  $\pi$                       b)  $2\pi$                       c)  $3\pi$   
d)  $4\pi$                       e)  $\pi/3$

31. Hallar el área máxima del círculo, si:  $AO = OB = 10$ .



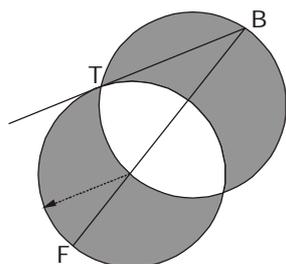
- a)  $\pi$                       b)  $2\pi$                       c)  $\sqrt{3}\pi$   
d)  $\sqrt{2}\pi$                       e)  $3\pi$

32. Hallar el área de la región sombreada, si el triángulo ABC es equilátero y  $BE = \sqrt{3}$ . (A, E, P son puntos colineales).



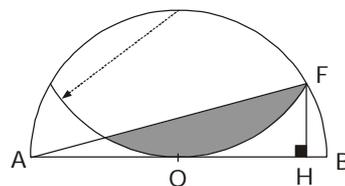
- a)  $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{2}$                       b)  $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}$                       c)  $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{2}$   
d)  $\frac{\pi}{6} - \frac{\sqrt{3}}{4}$                       e)  $\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{6}$

33. Si:  $BT = 24$  y  $BF = 36$ , hallar la diferencias de las áreas sombreadas. (T : punto de tangencia).



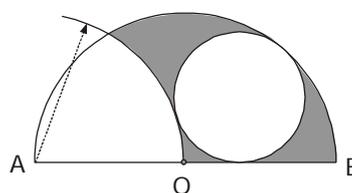
- a)  $169\pi$                       b) 85                      c)  $85\pi$   
d) 69                      e)  $69\pi$

34. Hallar el área de la región sombreada, si:  $\overline{AB}$  es diámetro,  $OA = OB$ .  $FH = 2$ . (O : punto de tangencia).



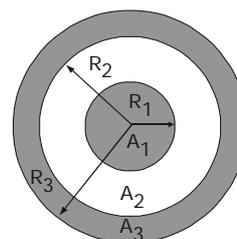
- a)  $2\pi - 1$                       b)  $4\pi - 1$                       c)  $4\pi - 4$   
d)  $2\pi - 8$                       e)  $4\pi - 8$

35. Hallar el área de la región sombreada, si:  $AO = OB = R$ . ( $\overline{AB}$  : diámetro).



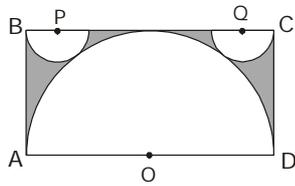
- a)  $\frac{R^2}{8}(6\sqrt{3} - \pi)$                       b)  $\frac{R^2}{24}(8\sqrt{3} - 3\pi)$   
c)  $\frac{R^2}{48}(12\sqrt{3} - \pi)$                       d)  $\frac{R^2}{36}(18\sqrt{3} - 5\pi)$   
e)  $R^2(5\sqrt{3} - \pi)$

36. ¿Cuál debe ser la relación de  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  para que las áreas del círculo  $A_1$  (interior) y los dos anillos  $A_2$  y  $A_3$ , respectivamente, sean iguales entre sí?



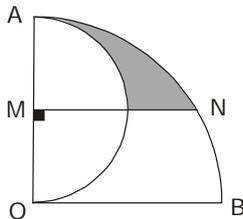
- a)  $R_1 = \frac{R_2}{2} = \frac{R_3}{3}$                       b)  $\frac{R_1}{\sqrt{3}} = \frac{R_2}{\sqrt{2}} = R_3$   
c)  $R_1 = \frac{R_2}{\sqrt{2}} = \frac{R_3}{\sqrt{3}}$                       d)  $\frac{R_1}{2} = \frac{R_2}{4} = \frac{R_3}{5}$   
e)  $\frac{R_1}{3} = \frac{R_2}{5} = \frac{R_3}{7}$

37. En la figura P, Q y O son centros de los semicírculos, si el rectángulo ABCD tiene perímetro 24 cm, el área de la región sombreada será de:



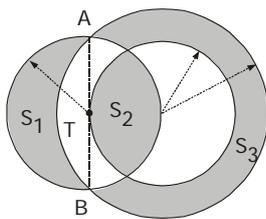
- a)  $(32 - 6\pi) \text{ cm}^2$       b)  $(26 - 6\pi)$   
 c)  $(9\pi - 23)$               d)  $(12\pi - 32\pi)$   
 e)  $(32 - 9\pi)$

38. La figura muestra un cuarto de círculo y un semicírculo  $AM = MO = 2\sqrt{3}$ . Calcular el área de la región sombreada.



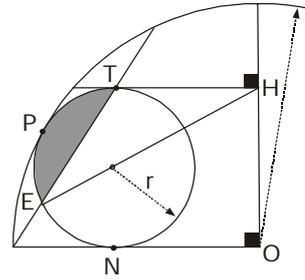
- a)  $5\pi - 3\sqrt{3}$     b)  $4\pi - 2\sqrt{3}$     c)  $5\pi - 6\sqrt{3}$   
 d)  $5\pi$             e)  $5\pi - 5\sqrt{3}$

39. En el gráfico: es diámetro. Si:  $S_1, S_2$  y  $S_3$  representan las áreas de las regiones sombreadas. ¿Qué relación existe entre  $S_1, S_2$  y  $S_3$ ?



- a)  $2S_3 = S_2 + S_1$       b)  $S_3 - S_2 = S_1$   
 c)  $S_1 \cdot S_2 = S_3$         d)  $S_2 + S_3 = 2S_1$   
 e)  $2S_1 + S_2 = S_3$

40. Calcular el área de la región sombreada, si:  $NO = \sqrt{3}$  y  $EH = 3$ . (T, P y N : puntos de tangencia).

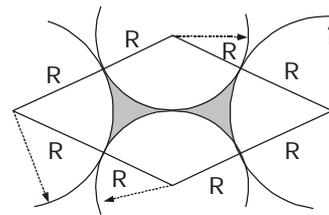


- a)  $(\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4})$     b)  $(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4})$     c)  $(\frac{3\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2})$   
 d)  $(\frac{3\pi}{4} - \sqrt{2})$     e)  $(\frac{\pi}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2})$

41. Un jardín circular de 12 m de diámetro está sembrado de pasto; pero es atravesado por un camino pavimentado recto de 3m de ancho, de modo que uno de sus bordes pasa por el centro. En consecuencia, el área sembrada, en metros cuadrados, es :

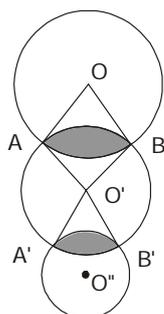
- a)  $35\pi - 9\sqrt{3}$                       b)  $30\pi + 9\sqrt{3}$   
 c)  $35\pi + 9\sqrt{3}$                       d)  $30\pi - 9\sqrt{3}$   
 e)  $30\pi - 6\sqrt{3}$

42. Los vértices de un rombo, de lado igual a una de sus diagonales son los centros de cuatro circunferencias congruentes y tangentes. Calcular el área de la región sombreada en función de radio R.



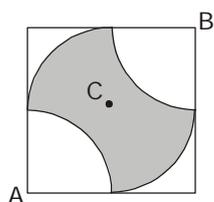
- a)  $2R^2(\sqrt{3} - \pi)$                       b)  $R^2(\sqrt{3} - \pi)$   
 c)  $2R^2\sqrt{3}\pi + 3R^2$                       d)  $R^2(2\sqrt{3} - \pi)$   
 e)  $\frac{R^2}{2}(\sqrt{3} - \pi)$

43. Hallar el área de la región sombreada indicada en la figura, si se sabe que la medida del ángulo  $\widehat{AOB}$  y la del ángulo  $\widehat{A'O'B'}$  es  $60^\circ$ , los segmentos  $\widehat{O'A}$ ,  $\widehat{O'B}$  son tangentes a la circunferencia con centro O y radio R, y los segmentos  $\widehat{O''A'}$ ,  $\widehat{O''B'}$  son tangentes a la circunferencia de centro  $O'$ .



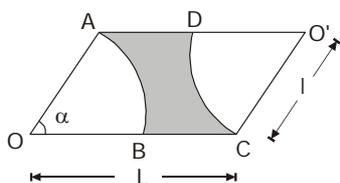
- a)  $R^2(10\pi - 12\sqrt{3})$       b)  $\frac{R^2}{9}(10\pi + 12\sqrt{3})$   
 c)  $\frac{R^2}{9}(10\pi - 12\sqrt{3})$       d)  $\frac{R^2}{27}(10\pi - 12\sqrt{3})$   
 e)  $\frac{R^2}{27}(10\pi + 12\sqrt{3})$

44. La siguiente figura es un cuadrado de lado "a". Las curvas son arcos de circunferencias de radio  $a/2$  con centro en los puntos A, B y en el centro C del cuadrado. ¿Cuál es el área de la región sombreada?



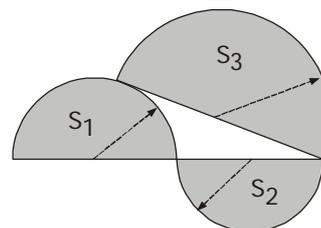
- a)  $\frac{a^2}{4}$       b)  $\frac{2a^2}{3}$       c)  $\frac{a^2}{3}$   
 d)  $\frac{3a^2}{4}$       e)  $\frac{a^2}{2}$

45. Hallar el área sombreada de la figura, donde " $\alpha$ " está expresado en radianes,  $CO'D$  y  $AOB$  son sectores circulares y  $OAO'C$  es un paralelogramo.



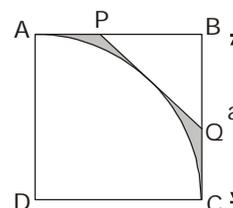
- a)  $L(L\text{Sen}\alpha - \alpha)$       b)  $L(L\text{Sen}\alpha - \alpha L)$   
 c)  $L(L\text{Sen}\alpha - L\alpha)$       d)  $L(L\text{Sen}\alpha - \alpha)$   
 e)  $\frac{1}{3}L\text{Sen}\alpha$

46. En el gráfico, se tienen semicírculos. Si :  $S_1 = 9\text{m}^2$  y  $S_2 = 4\text{m}^2$ , hallar :  $S_3$ .



- a)  $7\text{ m}^2$       b)  $9$       c)  $10$   
 d)  $12$       e)  $14$

47. Hallar el área de la región sombreada si ABCD es un cuadrado de lado "a" y  $\overline{PQ}$  es tangente al arco AC (de centro D), en su punto medio.



- a)  $[\frac{8\sqrt{2}-8+\pi}{4}]a^2$       b)  $[\frac{8\sqrt{2}+8-\pi}{4}]a^2$   
 c)  $[\frac{8\sqrt{2}+6+\pi}{4}]a^2$       d)  $[\frac{8\sqrt{2}+8}{3}]a^2$   
 e)  $[\frac{8\sqrt{2}-8-\pi}{4}]a^2$

48. ABC es un triángulo obtusángulo con  $AB = 2\sqrt{2}$ ,  $BC = 2\sqrt{10}$ ,  $AC = 8$ .  $C_1$  es una circunferencia circunscrita a ABC;  $C_2$  y  $C_3$  son dos circunferencias concéntricas con  $C_1$ , siendo  $\overline{AB}$  tangente a  $C_2$  y  $\overline{AC}$  tangente a  $C_3$ . Determinar el área del anillo circular limitado por  $C_2$  y  $C_3$ .

- a)  $10\pi$       b)  $13\pi$       c)  $14\pi$   
 d)  $16\pi$       e)  $20\pi$

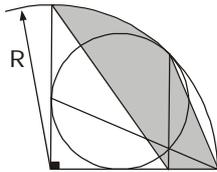
49. Dadas tres circunferencias de radio  $\sqrt{2}$ , tangente entre sí dos a dos. Calcular el área comprendida entre las tres circunferencias.

- a)  $\sqrt{2} + \pi$       b)  $3\sqrt{2} - \pi$       c)  $3\sqrt{2} + \pi$   
 d)  $2\sqrt{3} + \pi$       e)  $2\sqrt{3} - \pi$

50. Tomando como diámetro la altura de un triángulo equilátero de lado "4a", se traza una circunferencia. Calcular el área común que encierran ambas figuras.

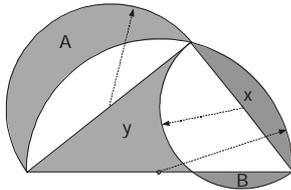
- a)  $(\frac{a^2}{2})(3\sqrt{3} + \pi)$
- b)  $(\frac{a^2}{2})(\pi + \sqrt{3})$
- c)  $a^2(2\pi - 3\sqrt{3})$
- d)  $(\frac{a^2}{2})(3\sqrt{3} + 2\pi)$
- e)  $a^2(\sqrt{3} - \pi)$

51. En la figura dada, hallar el área de la región sombreada en función de R.



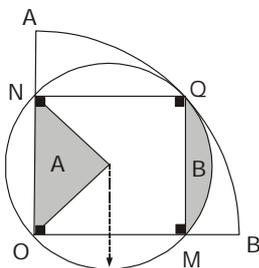
- a)  $\pi R^2 / 7$
- b)  $\pi R^2 / 6$
- c)  $\pi R^2 / 8$
- d)  $\pi R^2 / 9$
- e)  $\pi R^2 / 10$

52. Si :  $A+B = k$ , calcular :  $x + y$ .



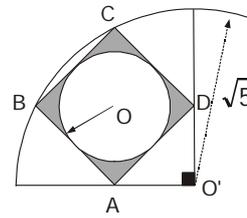
- a) K
- b) 2K
- c) 3K
- d) K/2
- e) K/3

53. Hallar A+B, si : AOB es un cuadrante y  $NA = 2K$  y  $MB = K$ . Si "Q" es punto de tangencia.



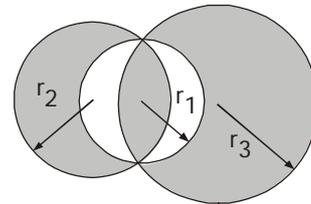
- a)  $\frac{185\pi}{36} k^2$
- b)  $\frac{185\pi}{144} k^2$
- c)  $\frac{285\pi}{36} k^2$
- d)  $\frac{37\pi}{360} k^2$
- e)  $\frac{\pi}{12} k^2$

54. Se muestra la circunferencia de centro "O" inscrita en el cuadrado ABC. Calcular el área de la región sombreada.



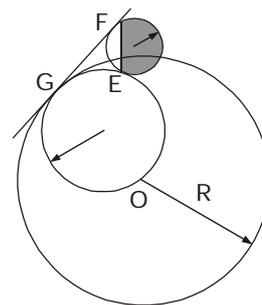
- a)  $\frac{4+\pi}{5}$
- b)  $\frac{4+\pi}{3}$
- c)  $\frac{3-\pi}{2}$
- d)  $(\frac{4-\pi}{2})$
- e)  $(4 - \frac{\pi}{2})$

55. Calcular el área de la región sombreada. Si :  $r_1 = 3m$ ,  $r_2 = 4m$ ,  $r_3 = 5m$ .



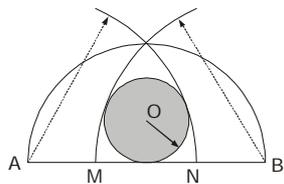
- a)  $27\pi$
- b)  $28\pi$
- c)  $30\pi$
- d)  $32\pi$
- e)  $36\pi$

56. En el gráfico :  $m\widehat{EO} = 120^\circ$ ,  $R=6$ . Calcular el área de la región sombreada, si G, F y E son puntos de tangencia.



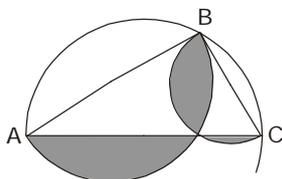
- a)  $\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{5}}{3}$
- b)  $\frac{2\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{4}$
- c)  $\pi + \sqrt{3}$
- d)  $4\pi + \frac{\sqrt{3}}{2}$
- e)  $2\pi + \frac{\sqrt{6}}{4}$

57. Del gráfico :  $AM = MN = NB$ ,  $AB = 2R$ .  
Calcular el área de la región sombreada.



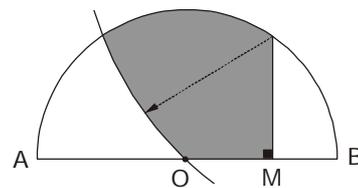
- a)  $\frac{9\pi}{24} R^2$     b)  $\frac{81}{36} \pi R^2$     c)  $\frac{49}{576} \pi R^2$   
d)  $\frac{6\pi}{1301} R^2$     e)  $\frac{74\pi}{25} R^2$

58. Calcular el área de la región sombreada, si:  
 $AC = 20m$ ;  $AB = 16m$ ,  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$ , son  
diámetros de las circunferencias.



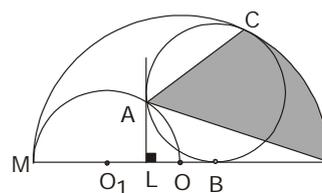
- a)  $(50\pi - 96)m^2$     b)  $(48\pi - 76)$   
c)  $(96\pi - 50)$     d)  $(50\pi - 48)$   
e)  $(48\pi - 69)$

59. En el gráfico,  $OM = MB$  y  $OA = OB = R$ .  
Calcular el área de la región sombreada.



- a)  $\frac{R^2}{24} (8\pi - 3\sqrt{3})$     b)  $\frac{R^2}{12} (8\pi - 5\sqrt{3})$   
c)  $\frac{R^2}{16} (7\pi - 3\sqrt{3})$     d)  $R^2 (3\sqrt{3}\pi - 1)$   
e)  $\frac{R^2}{6} (8\pi - 5\sqrt{3})$

60. Del gráfico, calcular el área de la región sombreada,  
si:  $ML = 9$  y  $LO = 3$ . Además: " $O_1$ " y " $O$ " son centros.



- a)  $20\pi u^2$     b)  $25\pi$     c)  $18\pi$   
d)  $28\pi$     e)  $24\pi$

# Claves

21.	<i>d</i>
22.	<i>b</i>
23.	<i>b</i>
24.	<i>a</i>
25.	<i>b</i>
26.	<i>e</i>
27.	<i>c</i>
28.	<i>a</i>
29.	<i>b</i>
30.	<i>a</i>
31.	<i>a</i>
32.	<i>b</i>
33.	<i>e</i>
34.	<i>c</i>
35.	<i>c</i>
36.	<i>c</i>
37.	<i>e</i>
38.	<i>c</i>
39.	<i>b</i>
40.	<i>b</i>

41.	<i>d</i>
42.	<i>d</i>
43.	<i>d</i>
44.	<i>e</i>
45.	<i>d</i>
46.	<i>c</i>
47.	<i>e</i>
48.	<i>c</i>
49.	<i>e</i>
50.	<i>d</i>
51.	<i>c</i>
52.	<i>a</i>
53.	<i>b</i>
54.	<i>d</i>
55.	<i>d</i>
56.	<i>b</i>
57.	<i>c</i>
58.	<i>a</i>
59.	<i>a</i>
60.	<i>c</i>