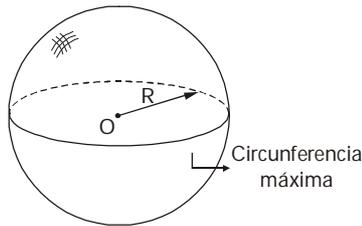


Capítulo 20

ESFERA I

SUPERFICIE ESFÉRICA

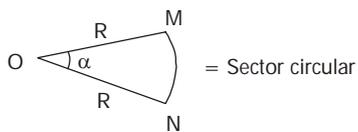
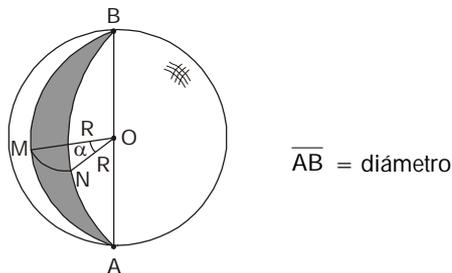
Es la superficie que genera la rotación de una semicircunferencia alrededor de su diámetro.



$$\begin{aligned} \text{Diámetro} &= 2R \\ \text{Área} &= 4\pi R^2 \end{aligned}$$

HUSO ESFÉRICO

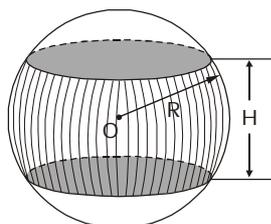
Es la porción de superficie esférica limitada por circunferencias que tienen el mismo diámetro.



$$\text{Área} = \frac{\alpha\pi R^2}{90^\circ}$$

ZONA ESFÉRICA

Es la porción de una superficie esférica comprendida entre dos planos paralelos a la esfera.

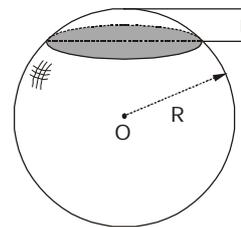


h = altura entre los planos secantes.

$$\text{Área} = 2\pi RH$$

CASQUETE ESFÉRICO

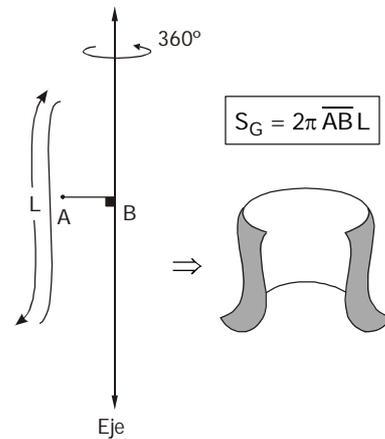
Es la porción de superficie esférica que se encuentra a un lado de un plano secante a la esfera.



$$\text{Área} = 2\pi RH$$

Observaciones :
En la figura, existen dos casquetes esféricos.

TEOREMA DE PAPPUS



Observaciones :
"A" = Centro de gravedad de la curva.
"L" = Longitud de la curva.

Test de aprendizaje preliminar

01. Calcular el volumen de una esfera, si el área de su círculo mayor es igual a $36\pi u^2$.
02. Hallar el área de la superficie esférica en la cual el área de uno de sus círculos máximos es 100 m^2 .
03. Se inscribe un cubo en una esfera de radio $\sqrt{3} \text{ m}$. Calcular su arista.
04. Hallar el radio de la esfera inscrita en un cono equilátero de altura 9.
05. Hallar el área de la esfera inscrita a un cubo, si el área de la esfera circunscrita es 180.
06. Si el área lateral de un cilindro recto es 9m^2 , hallar el área de la esfera inscrita.
07. Hallar la relación entre las áreas de un hexaedro regular y de la superficie esférica circunscrita al hexaedro.
08. Hallar el área de la superficie esférica inscrita a un cono de revolución de radio $3u$ y altura $4u$.
09. Hallar la relación entre las áreas totales entre un cilindro equilátero y la esfera circunscrita al cilindro.
10. ¿A qué distancia del centro de una esfera es 17m de radio debe pasar un plano secante para que la intersección tenga 8m de radio?

Practiquemos :

11. Determinar la superficie de una esfera inscrita a un cubo, que a su vez está inscrita a una esfera cuya superficie es $18u^2$.

12. Se tienen 3 bolas idénticas de volumen $36m^3$. Calcular la altura del cilindro más pequeño que contenga las bolas.

13. Una esfera tiene 3m de radio. ¿A qué distancia del centro debe trazarse un plano secante para que la sección obtenida sea $1/3$ del área de un círculo máximo?

14. Se tiene un alambre de $2\pi m^2$ de sección transversal, con el que se forma un ovillo esférico de 3m de radio. Calcular la longitud del alambre.

15. El área de un círculo máximo de una esfera mide $16\pi dm^2$. Se traza un plano secante por el centro, determinando dos semiesferas. Calcular el área de una de estas semiesferas.

16. Se tienen dos esferas metálicas de radios "a" y "2a". Dichas esferas se funden y se construye un cilindro recto cuya altura es "3a". Calcular el radio de la base del cilindro.

17. Hallar el área de la esfera inscrita en un tronco de cono de revolución de volumen $810u^3$ y de área total de $486 u^2$.

18. Calcular los radios de las esferas inscrita y circunscrita en un tetraedro regular cuya arista es $4\sqrt{6}$.

19. Determinar el área del casquete esférico que produce un plano secante a una esfera de $18u^2$, de área, trazada a una distancia del centro igual a la mitad de la longitud del radio.

20. El área del huso de 20° es $50\pi m^2$. Hallar la longitud del radio de la esfera.

Problemas propuestos

21. ¿Cuánto mide la cuerda de un arco generador de un casquete esférico cuya área es 36π ?
- a) 3 b) 4 c) 6
d) 9 e) 12
22. Determinar la altura de una zona esférica de una base, en una esfera de radio $8u$ de modo que el área de esta zona aumentada en el área de su base es igual a los $7/16$ del área de la esfera.
- a) $2u$ b) 3 c) 4
d) 5 e) 1
23. Una esfera, cuya superficie tiene una área de $36\pi u^2$, está inscrita en un prisma recto de base triangular rectangular. Calcular el volumen del prisma mencionado sabiendo que la hipotenusa en su base mide $7u$.
- a) $150u^3$ b) 120 c) 180
d) 140 e) 160
24. Calcular el área de la zona esférica de dos bases, cuyos radios de base miden 6 y 8 unidades y se encuentran a uno y otro lado del centro de la esfera que contiene a dicha zona. Además, se sabe que la altura es de 14 unidades de longitud.
- a) $140\pi u^2$ b) $120\sqrt{2}\pi$ c) 148π
d) $100\sqrt{3}\pi$ e) 280π
25. Dadas tres esferas de radio R ; tangentes exteriormente dos a dos y apoyados a un plano. Hallar el radio de la esfera tangente a las tres esferas y al plano.
- a) $R/2$ b) $R/4$ c) $R/3$
d) $2R/5$ e) $R/6$
26. Calcular el volumen de una cuña esférica; cuyo ángulo diedro es de 45° y el área del huso esférico correspondiente es igual a $18\pi u^2$.
- a) $24\pi u^3$ b) 32π c) 36π
d) 42π e) $18\sqrt{6}\pi$
27. Tres esferas de radios $9u$, $16u$ y $25u$ son tangentes exteriormente entre sí. Un plano tangente a las tres esferas determina 3 puntos de tangencia que son los vértices de un triángulo, cuyo perímetro se desea conocer.
- a) $83u$ b) 96 c) 94
d) 86 e) 85
28. Una esfera de centro "O" se encuentra inscrita en un ángulo diedro \overline{AB} de 60° . Si: $BO = 2\sqrt{3}$ y el ángulo ABO mide 30° , calcular el área de la esfera.
- a) π b) 2π c) 3π
d) 4π e) 5π
29. El área de una esfera es de $400\pi dm^2$. Dicha esfera es tangente a todos los lados de un rombo. La distancia del centro de la esfera al plano del rombo es de $4dm$. Calcular el área de dicho rombo, si la longitud de su lado es de "L" dm.
- a) $12L^2 dm^2$ b) $2\sqrt{21}L$ c) $8L^2$
d) $8\sqrt{2}L^2$ e) $4\sqrt{21}L$
30. Dado un tetraedro O-ABC, trirectángulo en "O". Si: $OA = 6u$, $OB = 12u$ y $OC = 18u$. Calcular la longitud del radio de la esfera inscrita al tetraedro.
- a) $2u$ b) $2,5$ c) 3
d) $2,8$ e) 4
31. En una esfera de radio $10u$, a qué distancia del centro hay que trazar un plano secante para que las áreas de los dos casquetes formados estén en la relación de 2 a 3.
- a) $1u$ b) $1,5$ c) $2,5$
d) 2 e) 3
32. En una esfera de radio "r", un casquete esférico de altura igual a $\frac{r}{4}$, es equivalente a un huso esférico, cuyo ángulo diedro determinado por sus caras laterales mide " θ ". Calcular " θ ".
- a) 90° b) 60° c) 53°
d) 45° e) 30°
33. Hallar el radio de la esfera circunscrita al octaedro regular de arista " ℓ ".
- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{6}$
34. Hallar el área del casquete generado por un arco cuyos extremos son los de una cuerda de longitud "a".
- a) $\frac{\pi a^2}{2}$ b) $\frac{2\pi a^2}{3}$ c) πa^2
d) $\frac{3\pi a^2}{2}$ e) $2\pi a^2$

35. Se tiene una esfera en la que el área del círculo máximo es "S". Hallar el área total de dos semiesferas que resultan al partir a la esfera.

- a) 4 S b) 5 S c) 6 S
d) 8 S e) 9 S

36. Determinar la altura de una zona de un base de una esfera de 8u de radio, de modo que la superficie de esta zona aumentada en la superficie de su base sea igual a los 7/16 de la superficie de la esfera.

- a) 1 u b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

37. Calcular el área de la superficie esférica de una esfera inscrita en un cono equilátero de $648\pi u^3$ de volumen.

- a) $184\pi u^2$ b) 178π c) 164π
d) 158π e) 144π

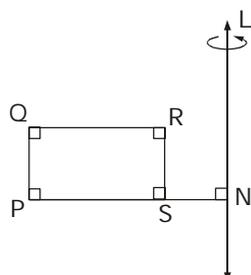
38. Sobre un plano reposan cuatro esferas iguales de radio "R". Tres de ellas hacen contacto entre sí de dos en dos y la cuarta tiene contacto con dos de estas tres. Sobre estas esferas se colocaron dos esferas iguales de menor diámetro que hacen contacto una con la otra y con tres de las esferas dadas inicialmente. Hallar la relación entre los radios de las esferas grande y pequeña.

- a) $\sqrt{2}u$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{6}$
d) $\sqrt{5}$ e) $\sqrt{7}$

39. En un cono de revolución cuya generatriz mide 5u, se inscribe una esfera tal que el plano que contiene a la circunferencia tangencial determina un cono deficiente de 2u de generatriz. Calcular el área del casquete menor formado.

- a) $\frac{6\pi}{5}u^2$ b) $\frac{7\pi}{5}$ c) $\frac{8\pi}{5}$
d) $\frac{9\pi}{5}$ e) 2π

40. En el gráfico, calcular el área de la superficie generada por el rectángulo PQRS al girar 360° en torno a L. Si : $3PQ = 2PS = 3NS = 6u$.



- a) $40\pi u^2$ b) 50π c) 60π
d) 70π e) 75π

41. En un cono equilátero, se inscribe una esfera de radio "r". Hallar el volumen del cono parcial que determina el plano que contiene los puntos de tangencia de la esfera; con las generatrices del cono.

- a) $\frac{\pi r^3}{6}$ b) $\frac{\pi r^3}{3}$ c) $\frac{3\pi r^3}{8}$
d) $\frac{4\pi r^3}{9}$ e) $\frac{2\pi r^3}{3}$

42. Dado un octaedro regular de volumen $9\sqrt{2}u^3$, hallar el área de la superficie esférica inscrita al octaedro.

- a) $3\pi u^2$ b) 4π c) 5π
d) 6π e) 9π

43. Un semicírculo de diámetro AB, gira alrededor de su diámetro en un ángulo de 60° . Calcular el volumen del sólido generado si : $AB = 6u$.

- a) $6\pi u^3$ b) 9π c) $3\sqrt{6}\pi$
d) $6\sqrt{3}\pi$ e) 12π

44. Hallar la relación entre las áreas de un hexaedro regular y de la superficie esférica circunscrita al hexaedro.

- a) $3/\pi$ b) $4/\pi$ c) $5/\pi$
d) $2/\pi$ e) $3/2\pi$

45. Hallar el área de la superficie esférica inscrita a un cono de revolución de radio 3u y altura 4u.

- a) $8\pi u^2$ b) 9π c) 12π
d) 7π e) 6π

46. Hallar la relación entre las áreas de las superficies determinadas al trazar un plano secante que se encuentra a una distancia igual a la tercera parte del radio de la superficie esférica.

- a) $1/3$ b) $2/3$ c) $3/4$
d) $1/2$ e) $1/4$

47. Dada una superficie esférica de radio 3u circunscrita a un cono de revolución de altura 4u y el plano tangente a la esfera en un punto de la base del cono. Hallar la distancia del vértice del cono al punto en que el eje de éste, encuentra al plano.

- a) 15 u b) 13 c) 11
d) 9 e) 12

48. Se tiene un tetraedro regular de arista "l". Calcular el radio de la esfera que es tangente a todas las aristas.

- a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{4}$
d) $\frac{\sqrt{2}}{5}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{6}$

49. Una superficie esférica es dividida por dos planos en dos casquetes y una zona. Hallar la altura de la zona, si el área de la zona es los $\frac{3}{5}$ de la suma de las áreas de los casquetes y el radio de la superficie esférica es $8R$.

- a) $4R$ b) $6R$ c) $3R$
 d) $5R$ e) $2R$

50. En un cono de revolución, está inscrita una esfera cuya superficie es igual al área de la base del cono. ¿En qué relación se divide el área lateral del cono por la línea de tangencia de ambas figuras?

- a) $\frac{4}{25}$ b) $\frac{4}{21}$ c) $\frac{3}{22}$
 d) $\frac{3}{25}$ e) $\frac{3}{26}$

51. Calcular la superficie de una esfera circunscrita a un ortoedro, cuyas dimensiones son $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ y 2 unidades, respectivamente.

- a) $6\pi u^3$ b) $\frac{9}{2}\pi$ c) 12π
 d) $\frac{15}{2}\pi$ e) 9π

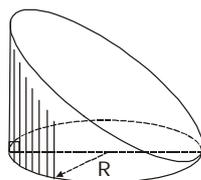
52. Calcular el área de la superficie esférica de una esfera, si la distancia en un punto de la proyección de la circunferencia máxima sobre un plano tangente paralelo al plano de dicha circunferencia máxima, al centro de la esfera es igual a 6 unidades.

- a) $72\pi u^2$ b) 75π c) 84π
 d) $60\sqrt{2}\pi$ e) $48\sqrt{3}\pi$

53. Calcular el área de una esfera, sabiendo que las áreas de dos círculos menores paralelos distantes $3u$ y situados a un mismo lado del centro, tienen áreas de πu^2 y $16\pi u^2$.

- a) $34\pi u^2$ b) 48 c) 68π
 d) 72 e) 48π

54. El área de la esfera inscrita al tronco de cilindro recto es de $16\pi dm^2$. Si la generatriz máxima mide 8 dm, calcular el volumen del tronco.



- a) $25\pi dm^3$ b) 28 c) 30
 d) 36 e) 48

55. Calcular el área de la superficie esférica, de una esfera inscrita en un tetraedro regular de $18\sqrt{2}u^3$ de volumen.

- a) $6\sqrt{2}\pi u^2$ b) $2\sqrt{6}\pi$ c) $3\sqrt{3}\pi$
 d) $\sqrt{6}\pi$ e) 6π

56. En un cilindro recto, se inscriben dos esferas tangentes exteriores ubicados uno sobre otro. Calcular el volumen del cilindro, si dichas esferas tiene volúmenes iguales a $4\sqrt{3}\pi u^3$.

- a) $12\sqrt{3}\pi u^3$ b) $14\sqrt{3}\pi$ c) 18π
 d) 24π e) $10\sqrt{6}\pi$

57. Calcular el volumen de una esfera equivalente a un cono equilátero de $4\pi u^2$ de área de base.

- a) $16\pi u^3$ b) $\frac{8\sqrt{3}}{3}\pi$ c) 18π
 d) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ e) 15π

58. Calcular el volumen de la esfera inscrita en un hexaedro regular cuya diagonal mide 12 unidades.

- a) $60\pi u^3$ b) $32\sqrt{3}\pi$ c) $30\sqrt{6}\pi$
 d) 48π e) $36\sqrt{2}\pi$

59. En una esfera de radio R , está inscrito un cono equilátero. ¿A qué distancia del centro de la esfera se debe trazar un plano paralelo a la base del cono de modo que la diferencia de las áreas que determina el plano en la esfera y el cono sea igual al área de la base del cono?

- a) $R/5$ b) $R/4$ c) $R/3$
 d) $R/2$ e) $3R/4$

60. Calcular el volumen de la esfera inscrita en un cilindro equilátero de $54\pi u^3$ de volumen.

- a) $45\pi u^3$ b) 48π c) 54π
 d) 60π e) 36π

Claves

21.	<i>c</i>
22.	<i>c</i>
23.	<i>c</i>
24.	<i>e</i>
25.	<i>c</i>
26.	<i>c</i>
27.	<i>c</i>
28.	<i>c</i>
29.	<i>e</i>
30.	<i>a</i>
31.	<i>d</i>
32.	<i>d</i>
33.	<i>a</i>
34.	<i>c</i>
35.	<i>c</i>
36.	<i>d</i>
37.	<i>e</i>
38.	<i>a</i>
39.	<i>d</i>
40.	<i>d</i>

41.	<i>c</i>
42.	<i>d</i>
43.	<i>a</i>
44.	<i>d</i>
45.	<i>b</i>
46.	<i>d</i>
47.	<i>e</i>
48.	<i>c</i>
49.	<i>b</i>
50.	<i>b</i>
51.	<i>e</i>
52.	<i>a</i>
53.	<i>c</i>
54.	<i>d</i>
55.	<i>e</i>
56.	<i>a</i>
57.	<i>b</i>
58.	<i>b</i>
59.	<i>e</i>
60.	<i>e</i>

