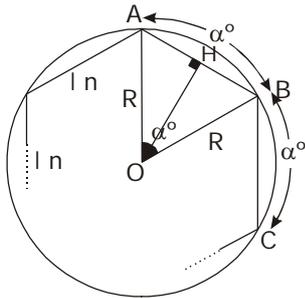


# Capítulo 13

## POLÍGONOS REGULARES

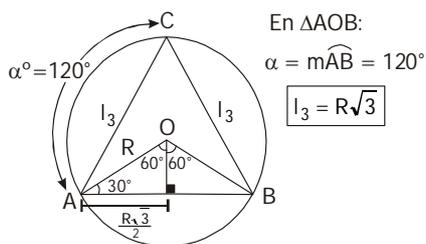
### POLÍGONOS REGULARES



- \* Polígono regular ABC....., de n lados
- \* Centro : O
- \* Circunradio : R
- \* Arco o  $\curvearrowright$  Central:  $\alpha^\circ = \frac{360^\circ}{n}$
- \* Lado del polígono inscrito : l n
- \* Apotema: OH
- \* Elemento representativo :  $\triangle AOB$

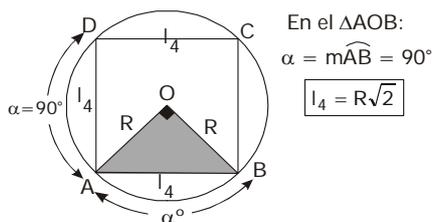
### CÁLCULO DEL LADO DE POLÍGONOS REGULARES MÁS USUALES

#### I. Triángulo Equilátero



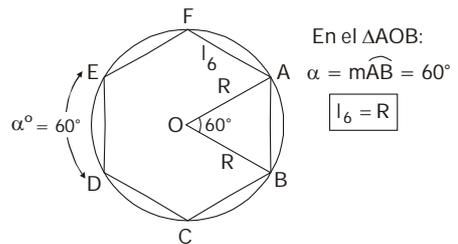
En  $\triangle AOB$ :  
 $\alpha = m\widehat{AB} = 120^\circ$   
 $l_3 = R\sqrt{3}$

#### II. Cuadrado



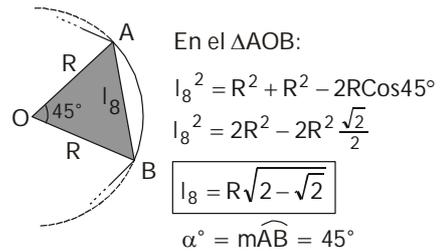
En el  $\triangle AOB$ :  
 $\alpha = m\widehat{AB} = 90^\circ$   
 $l_4 = R\sqrt{2}$

#### III. Hexágono Regular



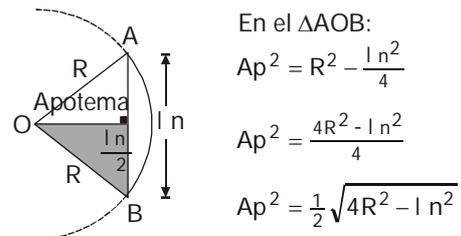
En el  $\triangle AOB$ :  
 $\alpha = m\widehat{AB} = 60^\circ$   
 $l_6 = R$

#### IV. Octógono Regular



En el  $\triangle AOB$ :  
 $l_8^2 = R^2 + R^2 - 2R^2 \cos 45^\circ$   
 $l_8^2 = 2R^2 - 2R^2 \frac{\sqrt{2}}{2}$   
 $l_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$   
 $\alpha^\circ = m\widehat{AB} = 45^\circ$

### CÁLCULO DEL APOTEMA (Ap)



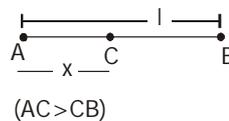
En el  $\triangle AOB$ :  
 $Ap^2 = R^2 - \frac{l_n^2}{4}$   
 $Ap^2 = \frac{4R^2 - l_n^2}{4}$   
 $Ap = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - l_n^2}$

### DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN

Por definición :

$$x^2 = l(l - x)$$

entonces, la solución es :



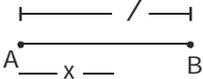
$$x = \frac{l(\sqrt{5}-1)}{2}$$

\*  $\overline{AC}$  (o sea "x") es la sección áurea de  $\overline{AB}$ .

\*  $\frac{(\sqrt{5}-1)}{2}$  se le denomina número áureo.

POLÍGONOS REGULARES	Arco o $\sphericalangle$ central	Lado
Triángulo	120°	$l_3 = R\sqrt{3}$
Cuadrado	90°	$l_4 = R\sqrt{2}$
Hexágono	60°	$l_6 = R$
Pentágono	72°	$l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$
Octógono	45°	$l_8 = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$
Decágono	36°	$l_{10} = R(\sqrt{5} - 1)/2$
Dodecágono Regular	30°	$l_{12} = R\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

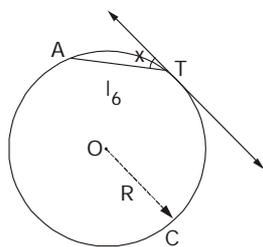
  

 <p>A — x — B</p>	<p>Si x es la sección áurea de <math>\overline{AB}</math>.</p> <p><math>\Rightarrow x = R(\sqrt{5} - 1)/2</math></p>
--	--

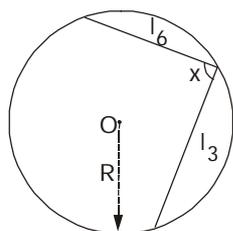
R : circunradio

**Test de aprendizaje preliminar**

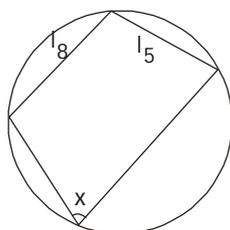
01. Si: "O": centro, "T": punto de tangencia. Calcular: "x".



02. Del gráfico, calcular : "x".

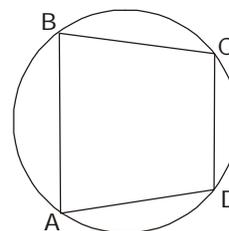


03. Calcular "x".



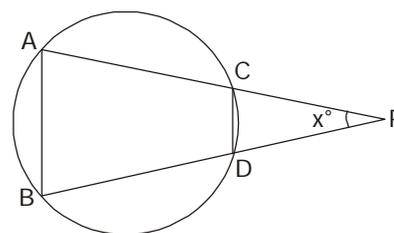
04. Si:

$AB = l_3 ; AD = l_6 ; BC = l_4$

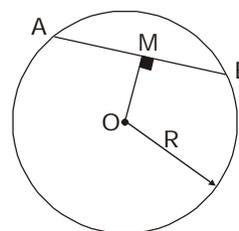


Entonces, CD es:

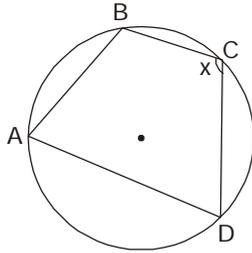
05. Si:  $AB = l_3 ; CD = l_{10}$ . Entonces,  $x^\circ$  mide:



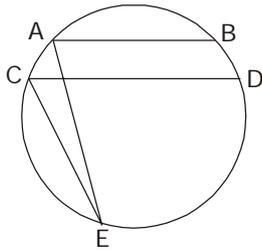
06. Si :  $R = 6, AB = l_3$ , entonces, OM mide :



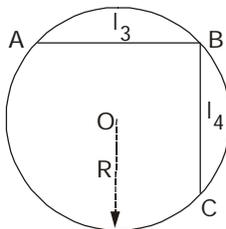
07. Calcular:  $x^\circ$ , si:  $AB = l_4$ ;  $AD = l_3$ .



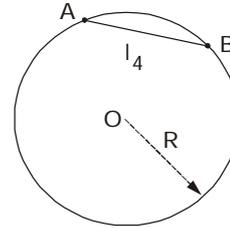
08. En la figura mostrada se cumple:  $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ ,  $m \angle AEC = 14^\circ$  y  $\overline{AB}$  es el lado del pentágono regular inscrito en la circunferencia. Hallar  $m \angle AED$ .



09. Hallar:  $m \angle ABC$ .



10. Del gráfico,  $l_4 = 4$ , calcular el radio de la circunferencia.



### Practiquemos :

11. ¿Cuál es el polígono regular cuyo lado es el doble de su apotema?

12. Calcular la relación entre el inradio y circunradio de un triángulo equilátero.

13. En un pentágono regular ABCDE, se traza  $\overline{BE}$  y  $\overline{AC}$  que se intersectan en "F". Si:  $EF = 7$ , calcular el lado del pentágono.

14. En una circunferencia de radio  $R$ , se tiene una cuerda  $\overline{AB}$  que mide  $R\sqrt{3}$ . ¿De qué polígono regular el segmento  $\overline{AB}$  es un lado?
15. Un triángulo equilátero está inscrito en una circunferencia de radio 6. Hallar el lado del hexágono regular inscrito en el triángulo.
16. Diga cuánto mide el lado de un hexágono regular circunscrito a una circunferencia de radio igual a  $4\sqrt{3}$ .
17. Un cuadrado y un hexágono regular se inscriben en una misma circunferencia; la razón de sus apotemas es:
18. En una misma circunferencia, el cociente del perímetro del hexágono regular circunscrito entre el perímetro del hexágono regular inscrito, es de:
19. Calcular la longitud de una de las diagonales de un pentágono regular cuyo lado mide 2.
20. Si el lado de un pentágono regular mide  $(\sqrt{5} - 1)$  metros, hallar la suma de las longitudes de todas sus diagonales.

### Problemas propuestos

21. En un triángulo  $ABC$  inscrito en una circunferencia, se tiene que :  
 $\overline{AB} = \frac{1}{3}$ ;  $\overline{AC} = \frac{1}{4}$ . Calcular la medida del lado  $BC$ , si la medida del radio de la circunferencia es 2.
- a)  $\sqrt{3} + \sqrt{2}$     b)  $\sqrt{6} + \sqrt{2}$     c)  $\sqrt{6} + \sqrt{3}$   
 d)  $2 + \sqrt{3}$     e)  $2\sqrt{3}$
22. Se tiene un octógono regular inscrito en una circunferencia de radio igual a  $3\sqrt{2}$ . Hallar el perímetro de aquel polígono que se obtiene al unir consecutivamente los puntos medios de sus lados.
- a) 12    b) 18    c) 20  
 d) 24    e) 48
23. Dado un dodecágono regular inscrito en una circunferencia de radio 4 cm. Hallar el perímetro del polígono que se obtiene al unir los puntos medios de sus lados.
- a) 12 cm    b) 18 cm    c) 24 cm  
 d) 30 cm    e) 36 cm
24. Dado un cuadrado de lado "L", a partir de cada vértice y sobre cada lado se toma un segmento "x", de tal manera que al retirarlos y unir los extremos libres se forme un octógono regular. Hallar "x".
- a)  $\frac{L}{2}(2 - \sqrt{2})$     b)  $\frac{L}{2}(2 - 1)$     c)  $\frac{L}{2}(2 + 1)$   
 d)  $\frac{L}{2}(\sqrt{2} + 1)$     e)  $\frac{L}{2}(\sqrt{2} + 2)$

25. En un hexágono regular ABCDEF de lado  $\sqrt{13}$ , las prolongaciones de la diagonal  $\overline{AC}$  y el lado  $\overline{EF}$  se cortan en "P". Hallar PD.

- a) 10                      b) 11                      c) 12  
d) 13                      e) 6,5

26. En un polígono regular ABCDEF... se cumple que  $7(m \sphericalangle BAC) = m \sphericalangle ABD$ ,  $AC = 2\sqrt{5}$ . Calcular el radio de la circunferencia circunscrita a dicho polígono.

- a)  $\sqrt{10+2\sqrt{5}}$     b)  $\sqrt{2-\sqrt{3}}$                       c)  $\sqrt{5}-1$   
d)  $\sqrt{5}+1$                       e)  $\sqrt{10-2\sqrt{5}}$

27. Un triángulo equilátero está inscrito en una circunferencia de radio 2m. Calcular la suma de las alturas del triángulo.

- a) 6 m                      b)  $6\sqrt{3}$  m                      c) 9 m  
d)  $9\sqrt{3}$  m                      e)  $8\sqrt{3}$  m

28. En un triángulo rectángulo ABC recto en B, se traza la ceviana BF, tal que :  $AB = FB$ ,  $m \sphericalangle FBC = 60^\circ$ ; y  $AC = 2\sqrt{2+\sqrt{3}}$  m. Hallar la longitud FB.

- a) 1 m                      b) 2 m                      c)  $\sqrt{3}$  m  
d)  $\sqrt{2}$  m                      e)  $2\sqrt{2}$  m

29. Hallar el lado de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio 5cm, si se sabe que su apotema es la diferencia del lado del polígono con el radio de la circunferencia circunscrita.

- a) 7 cm                      b) 8 cm                      c) 9 cm  
d) 6 cm                      e) 5 cm

30. Se tiene un cuadrado de lado  $8\sqrt{2}$ . Si a partir de cada vértice se disminuye una cierta longitud "x" se formarán en cada esquina triángulos rectángulo isósceles. Eliminandolos quedará un polígono de 8 lados. Hallar "x" para que el polígono resultante sea regular.

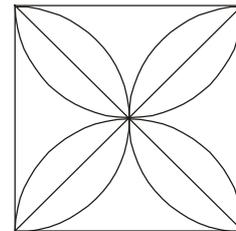
- a)  $8(2+\sqrt{2})$     b)  $8(\sqrt{2}+1)$                       c)  $8(2-\sqrt{2})$   
d)  $8(\sqrt{2}+1)$     e)  $8(2\sqrt{2}-1)$

31. Un polígono regular de n lados, cuyo lado mide  $L_n$  está inscrito en una circunferencia cuyo radio mide R. Calcular la longitud del lado del polígono regular de doble número de lados que el anterior ( $L_{2n}$ ), inscrito en la misma circunferencia.

- a)  $L_{2n} = \sqrt{2R^2 + R\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$   
b)  $L_{2n} = \sqrt{4R^2 + \sqrt{L_n^2 - 4R^2}}$

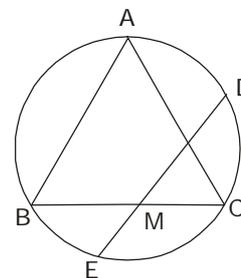
- c)  $L_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - L_n^2}}$   
d)  $L_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R + L_n^2}}$   
e)  $L_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{3R - L_n^2}}$

32. Una ventana cuadrada de lado 60 cm tiene la forma del diseño dado. Las curvas son arcos de circunferencia. Entonces, la longitud de fierro usado en la construcción de la ventana, es:



- a)  $120(1+\sqrt{2}+2\pi)$  m    b)  $120(2+\sqrt{2}+\pi)$  m  
c)  $240(1+\sqrt{2}+\pi)$  m    d)  $240(2+2\sqrt{2}+\pi)$  m  
e)  $120(2+\sqrt{2}+2\pi)$  m

33. En la figura, el triángulo ABC es equilátero, M es punto medio del lado  $\overline{BC}$  y D es punto medio del arco  $\widehat{AC}$ . Si x e y representan las longitudes de los segmentos  $\overline{DM}$  y  $\overline{ME}$  respectivamente, hallar x/y.



- a) 5/3                      b) 2                      c) 4  
d) 8/3                      e) 7/3

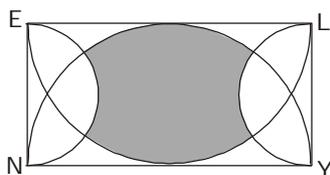
34. Los lados AB y BC de un triángulo ABC miden 2m y  $(\sqrt{5}+1)$ m, respectivamente. Calcular la  $m \sphericalangle A$ , si :  $m \sphericalangle C = 18^\circ$ .

- a)  $20^\circ$                       b)  $45^\circ$                       c)  $15^\circ$   
d)  $30^\circ$                       e)  $72^\circ$

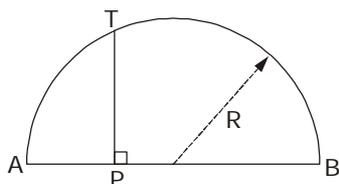
35. Si el lado del dodecágono regular ABCDEFGHIJKL mide  $\sqrt{6-3\sqrt{3}}$  m, hallar la longitud AE.

- a) 1 m                      b) 2 m                      c) 3 m  
d) 4 m                      e) 5 m

36. Si el perímetro del rectángulo NELY es 180 cm, indicar el perímetro de la región sombreada.



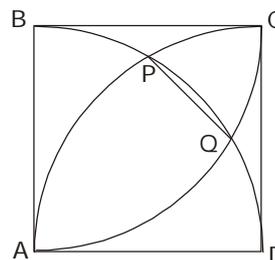
- a)  $35\pi$  cm    b)  $36\pi$  cm    c)  $39\pi$  cm  
 d)  $38\pi$  cm    e)  $37\pi$  cm
37. Hallar la longitud del lado de un dodecágono regular sabiendo que el radio de la circunferencia inscrita en él mide 1cm.
- a)  $(2 - \sqrt{3})$  cm    b)  $(\sqrt{2 - \sqrt{3}})$  cm  
 c)  $(\sqrt{2 + \sqrt{3}})$  cm    d)  $2(2 - \sqrt{3})$  cm  
 e)  $(2 + \sqrt{3})$  cm
38. En la figura "P", divide al diámetro  $\overline{AB}$  en media y extrema razón. Calcular PT, si:  $R = \sqrt{2 + \sqrt{5}}$ .



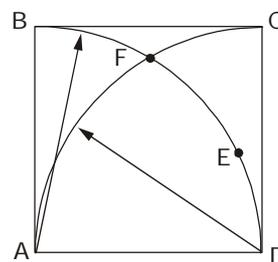
- a) 0,5    b) 1    c) 1,5  
 d) 2    e)  $\sqrt{5}$
39. En un polígono regular ABCDEFG, si:  $\frac{1}{AD} + \frac{1}{AC} = \frac{1}{7}$ . Calcular AB.
- a) 6    b) 7    c) 8  
 d) 9    e) 10
40. En un eneágono regular ABCDEFGHI se cumple que:  $AB + BD = 14m$ . Calcular BG.
- a) 3 m    b) 7 m    c) 11 m  
 d) 14 m    e) 21 m
41. En un polígono regular de 13 lados ABCDEFGHIJKM  $AD = a$ ,  $AE = b$ . Calcular JD.

- a)  $a + b$     b)  $\frac{ab}{a+b}$     c)  $\sqrt{a^2 + b^2}$   
 d)  $\sqrt{b^2 + ab}$     e)  $\sqrt{a^2 + ab}$

42. ABCD es un cuadrado de lado 2 dm, A, B y D son centros. Calcular el valor de  $\overline{PQ}$ .



- a)  $2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$  dm    b)  $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$  dm  
 c)  $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$  dm    d)  $2\sqrt{2 - \sqrt{3}}$  dm  
 e)  $(\frac{\sqrt{5} - 1}{2})$  dm
43. El cateto menor de un triángulo rectángulo mide:  $\sqrt{2 - \sqrt{2}}$ , y es igual a la longitud de la bisectriz interna relativa a la hipotenusa. Hallar la longitud de la hipotenusa.
- a) 1 m    b) 2 m    c) 3 m  
 d) 4 m    e) 6 m
44. ABCD es un cuadrado cuyo lado mide  $4\sqrt{2 + \sqrt{3}}$ . Calcular la distancia de "F" al punto medio "E" del FD.



- a) 2    b)  $2\sqrt{2}$     c) 6  
 d) 4    e)  $4\sqrt{3}$
45. En un triángulo ABC, donde:  $m \angle A = 45^\circ$  y  $m \angle C = 15^\circ$ , se trazan las alturas  $\overline{AH}$  y  $\overline{CQ}$ . Hallar: QH, si:  $AC = 20$  m.
- a) 10 m    b)  $5\sqrt{2}$  m    c)  $2(\sqrt{5} + 1)$  m  
 d) 5 m    e)  $10\sqrt{2 - \sqrt{2}}$  m
46. Dado un triángulo ABC obtuso en "A", de tal manera:  $AB = \sqrt{2}$ ,  $BC = \sqrt{5} + 1$  y la  $m \angle C = 18^\circ$ . Determinar la  $m \angle B$ .
- a)  $18^\circ$     b)  $9^\circ$     c)  $27^\circ$   
 d)  $54^\circ$     e)  $36^\circ$

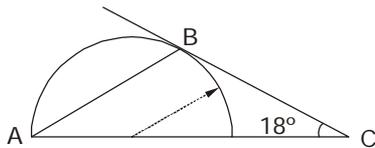
47. Calcular el lado del polígono regular de 16 lados circunscrito a una circunferencia de radio  $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ .

- a)  $4\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$     b)  $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$   
 c)  $2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$     d)  $2\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$   
 e)  $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$

48. En un octógono regular ABCDEFGH inscrito en una circunferencia en el arco  $\widehat{BC}$ , se ubica el punto "P" de manera que:  $\overline{PD}$  y  $\overline{PF}$  miden "m" y  $n\sqrt{2}$ . Hallar: "PH".

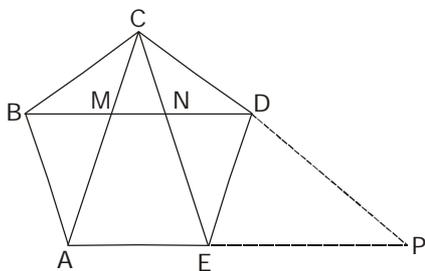
- a)  $2n + m$     b)  $m + n$     c)  $2m - n$   
 d)  $\frac{mn}{m+n}$     e)  $2n - m$

49. En la figura, calcular AB, si:  
 $BC = \sqrt{5-\sqrt{5}}$ . (B, punto de tangencia).



- a)  $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$     b)  $\sqrt{5}+1$   
 c)  $\sqrt{3}(\sqrt{5}-1)$     d)  $\sqrt{5}(\sqrt{5}-1)$   
 e)  $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{5}-1)$

50. En la figura, ABCDE es un pentágono regular. Calcular EP, si:  $MN = 2$ .



- a)  $2(\sqrt{5}+2)$     b)  $2(\sqrt{5}+1)$   
 c)  $4(\sqrt{5}-1)$     d)  $8(\sqrt{5}-2)$   
 e)  $4(\sqrt{5}-1)$

51. Calcular la flecha correspondiente a una cuerda que subtende un arco de  $144^\circ$  en una circunferencia de 8 unidades de diámetro.

- a)  $2(\sqrt{2}-1)$     b)  $5-\sqrt{5}$     c)  $2+\sqrt{2}$   
 d)  $\sqrt{5}+1$     e)  $\sqrt{2}+2$

52. Se tiene un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio R, cuyo apotema mide "a" unidades. Calcular el apotema de otro polígono regular del doble número de lados que el anterior, si cuyos perímetros son iguales.

- a)  $\sqrt{R^2-a^2}$     b)  $\frac{aR}{2}$     c)  $\sqrt{Ra}$   
 d)  $\frac{R+a}{2}$     e)  $\frac{2R}{a}$

53. La sección áurea del segmento  $\overline{AB}$  es  $\overline{BC}$ , la sección de  $\overline{AC}$  es  $\overline{AM}$ , la sección áurea de  $\overline{AM}$  es AF. Si:  $BC = 4$ , calcular AF.

- a)  $2(\sqrt{5}-1)$     b)  $2(\sqrt{5}+1)$     c)  $4(\sqrt{5}-2)$   
 d)  $\sqrt{5}-1$     e)  $3(\sqrt{5}-1)$

54. En un dodecágono regular ABCDEFGHIJKL,  $\overline{AE}$  y  $\overline{CF}$  se intersectan en P. Calcular PE, si:  $BC = 2\sqrt{2}$ .

- a) 1    b)  $\sqrt{2}$     c)  $\frac{3}{2}$   
 d)  $\sqrt{3}$     e)  $\sqrt{5}$

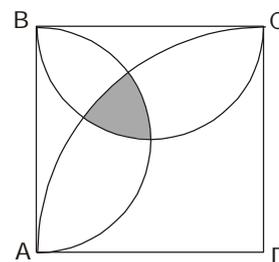
55. En un romboide ABCD, se cumple que  $BC = AC$ , hallar: BD, si:  $m \sphericalangle CAD = 30^\circ$  y  $AD = \sqrt{5+2\sqrt{3}}m$ .

- a)  $\sqrt{2}m$     b)  $2\sqrt{3}m$     c)  $3\sqrt{2}m$   
 d)  $\sqrt{13}m$     e)  $2\sqrt{6}m$

56. En un triángulo rectángulo ABC, el ángulo "C" mide  $11^\circ 15'$  y la hipotenusa  $\overline{AC}$  es igual a  $2\sqrt{4+2\sqrt{2}}m$ . Hallar la menor altura del triángulo.

- a) 1 m    b) 2 m    c)  $\sqrt{2}m$   
 d)  $2\sqrt{2}m$     e)  $\sqrt{2-\sqrt{2}}m$

57. Si ABCD es un cuadrado cuyo lado mide 180 cm, hallar el perímetro de la región sombreada.



- a)  $53\pi$  cm    b)  $55\pi$  cm    c)  $56\pi$  cm  
 d)  $57\pi$  cm    e)  $58\pi$  cm

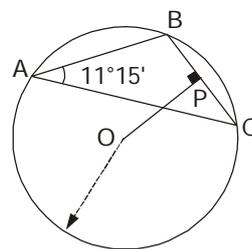
58. Se tiene un octógono regular ABCDEFGH inscrito en una circunferencia de radio R. Hallar la distancia de A al punto medio de  $\overline{ED}$ .

- a)  $\frac{R}{2}\sqrt{10+3\sqrt{2}}$     b)  $2R\sqrt{2-\sqrt{2}}$   
 c)  $2R\sqrt{2+\sqrt{2}}$     d)  $\frac{R}{2}\sqrt{8+3\sqrt{2}}$   
 e)  $2R\sqrt{2}$

59. En un triángulo ABC, se trazan las cevianas  $\overline{CF}$  y  $\overline{AE}$  cumpliéndose que:  
 $m\angle AFC = m\angle AEC = 135^\circ$  y,  
 $m\angle B = 120^\circ$ . Calcular EF, si:  $AC = 2\sqrt{2}$ .

- a)  $\sqrt{3-\sqrt{2}}$     b)  $2\sqrt{2+\sqrt{3}}$   
 c)  $\sqrt{2+\sqrt{3}}$     d)  $\sqrt{2-\sqrt{3}}$   
 e)  $2\sqrt{2-\sqrt{3}}$

60. En la figura,  $OP = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ . Calcular BC.



- a)  $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2}}}$     b)  $4\sqrt{2-\sqrt{2}}$   
 c)  $\sqrt{2+\sqrt{2}}$     d)  $2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$   
 e)  $2\sqrt{2}$

# Claves

21.	<i>b</i>
22.	<i>d</i>
23.	<i>c</i>
24.	<i>a</i>
25.	<i>d</i>
26.	<i>a</i>
27.	<i>c</i>
28.	<i>a</i>
29.	<i>b</i>
30.	<i>b</i>
31.	<i>c</i>
32.	<i>b</i>
33.	<i>e</i>
34.	<i>d</i>
35.	<i>c</i>
36.	<i>e</i>
37.	<i>d</i>
38.	<i>d</i>
39.	<i>b</i>
40.	<i>d</i>

41.	<i>e</i>
42.	<i>d</i>
43.	<i>b</i>
44.	<i>d</i>
45.	<i>a</i>
46.	<i>c</i>
47.	<i>c</i>
48.	<i>e</i>
49.	<i>e</i>
50.	<i>a</i>
51.	<i>b</i>
52.	<i>d</i>
53.	<i>c</i>
54.	<i>b</i>
55.	<i>d</i>
56.	<i>a</i>
57.	<i>a</i>
58.	<i>a</i>
59.	<i>e</i>
60.	<i>d</i>