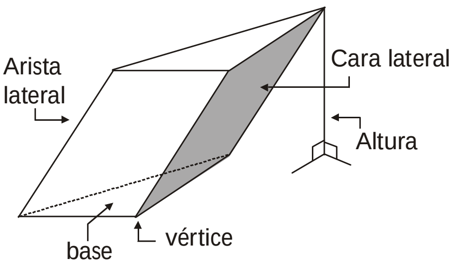
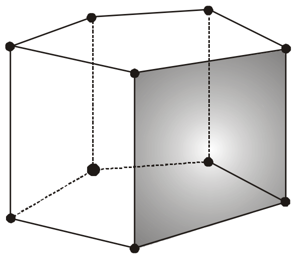
Capítulo 18 PRISMA - CILINDRO - TRONCOS

PRISMA - CILINDRO

PRISMA

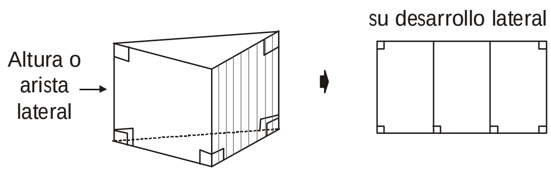




El nombre del prisma depende del polígono de la base. Los gráficos muestran a un prisma triangular y a otro hexagonal.

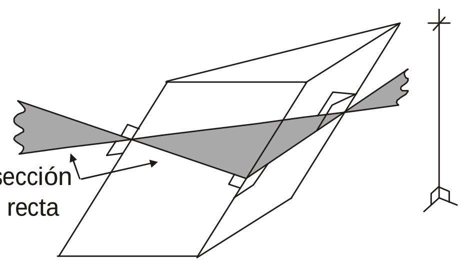
Clasificación

I. Prisma Recto



$$A_L = (2P_{BASE}).(\text{Arista Lateral})$$
$$A_T = A_L + 2A_{BASE}$$
$$V = (A_{BASE}).\text{altura}$$

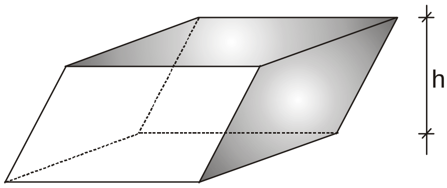
II. Prisma Oblicuo



$$A_L = (2P_{S.R}).(\text{Arista Lateral})$$
$$V = (A_{S.R}).(\text{Arista Lateral})$$
$$V = (A_{BASE}).(\text{Altura})$$

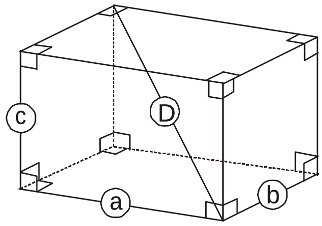
III. Paralelepípedo

Las caras opuestas son paralelogramos congruentes y de planos paralelos.



$V = (A_{BASE})$. Altura

* Paralelepípedo rectangular
(Rectoedro y ortoedro)

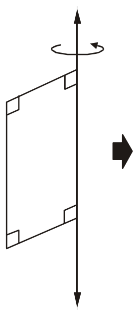


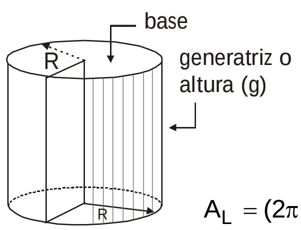
$\text{Área} = 2(ab + bc + ac)$

$\text{Volumen} = abc$

$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

CILINDRO



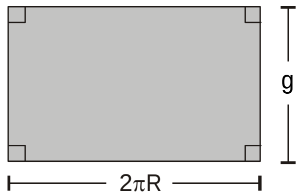


$A_L = (2\pi R)g$

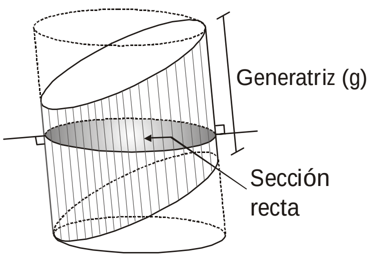
$A_T = 2\pi R(g + R)$

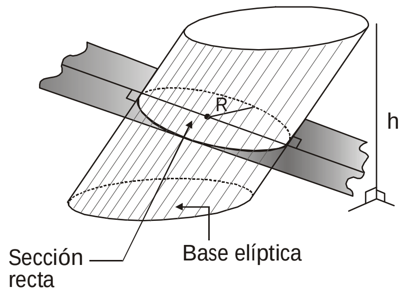
$S = (\pi R^2)\,g$

su desarrollo lateral



Cilindro oblicuo obtenido al cortar a un cilindro recto mediante dos planos paralelos entre sí; pero inclinados respecto de la base.





$A_L = (2P_{S.R})(\text{generatriz})$

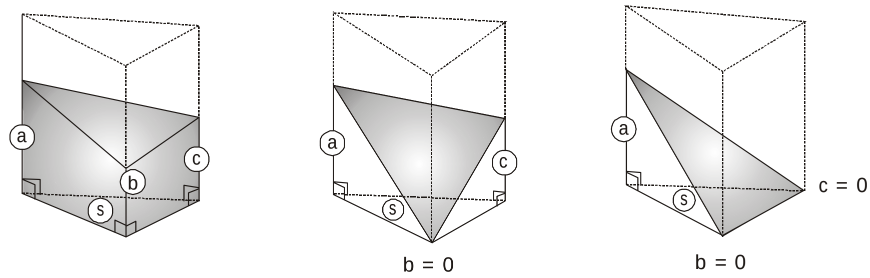
$A_T = A_L + 2\,A_{BASE}$

$V = (A_{S.R}).(\text{generatriz})$

$V = (A_{BASE})(\text{Altura})$

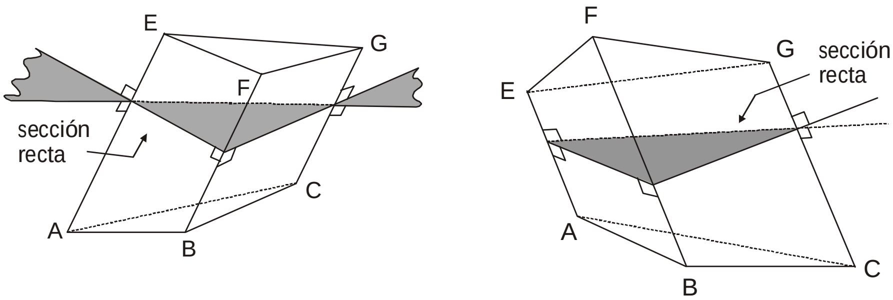
TRONCOS DE PRISMA Y CILINDRO

TRONCO DE PRISMA TRIANGULAR RECTO

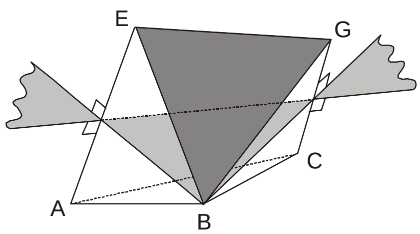


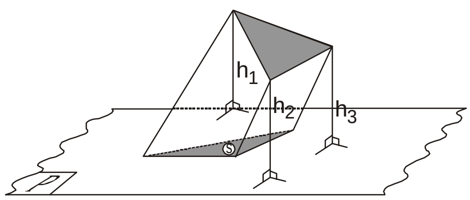
$$V=\frac{S}{3}(a+b+c) \qquad V=\frac{S}{3}(a+c) \qquad V=\frac{a.S}{3}$$

TRONCO DE PRISMA TRIANGULAR OBLICUO



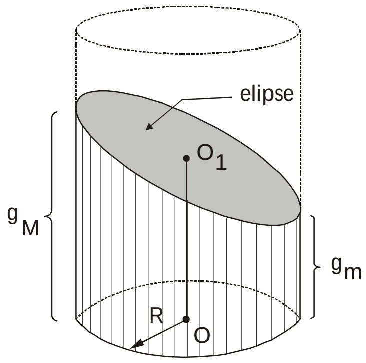
$$V=\frac{(As.R)}{3}(AE+BF+CG)$$





$$V=\frac{(As.R)}{3}(AE+CG) \qquad V=\frac{s}{3}(h_1+h_2+h_3)$$

TRONCO DE CILINDRO CIRCULAR RECTO

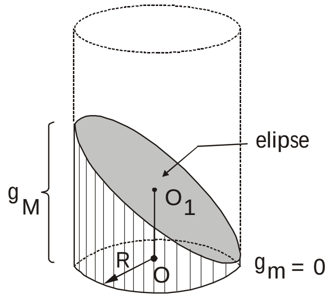


OO_1 : eje $= \dfrac{g_M + g_m}{2}$

$A_L = (2\pi R)$ eje

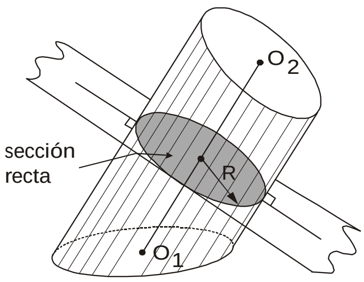
$A_T = A_L + A_{BASES}$

$V = \pi R^2$.eje



A_L : Área Lateral

TRONCO DE CILINDRO OBLICUO

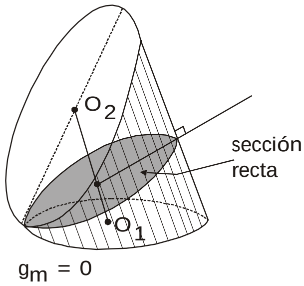


Eje $= \dfrac{g_M + g_m}{2}$

$A_L = (2\pi R)$eje

$A_T = A_L + A_{BASES}$

$V = (As.R)$(eje)



Test de aprendizaje preliminar

01. Un cilindro recto cuya altura es igual al diámetro de la base, tiene un área total de 12π . Calcular su volumen.

02. Las tres dimensiones de un rectoedro están en progresión aritmética y suman 45 unidades. Calcular el volumen, si su área total es igual a $1332\ u^2$.

03. Calcular el volumen de un prisma cuadrangular regular, si la diagonal del desarrollo de la superficie lateral mide 37 unidades y la arista lateral de dicho prisma mide 35 unidades.

04. Calcular el área lateral de un cilindro recto; cuya generatriz mide 12 unidades y su área de base es igual a $16\pi\ u^2$.

05. La diagonal de un paralelepípedo rectangular es igual a $\sqrt{70}$ unidades. Calcular el volumen, si dos de sus dimensiones de dicho paralelepípedo son 3 y 5 unidades.

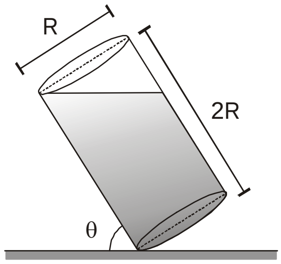
06. Calcular el volumen de un ortoedro, cuyas diagonales de sus caras miden $\sqrt{74}$, $\sqrt{130}$ y $\sqrt{106}$ unidades.

07. Dos cilindros circulares rectos semejantes y de áreas total de 18π dm^2 y 50π dm^2. ¿En qué relación están sus volúmenes?

08. En un paralelepípedo rectangular las diagonales de las caras miden $\sqrt{34}$, $\sqrt{58}$ y $\sqrt{74}$ cm.
El volumen del paralelepípedo, en m^3 , será :

09. En un prisma triangular regular, se inscribe un cilindro. ¿Qué relación existe entre las áreas laterales de estos dos cuerpos?

10. Un cilindro contiene las tres cuartas partes de su volumen con agua. Si se inclina como se muestra en la figura, ¿cuánto debe medir " θ " para que el agua no se derrame?



Practiquemos :

11. En una piscina de 40 m de largo, 12 m de ancho y 3,5 m de alto, se introducen 720000 litros de H_2O. ¿A qué distancia del borde llega el H_2O?

12. Calcular el volumen de un cilindro generado por la rotación de un rectángulo alrededor de un lado, si el área del rectángulo generador es igual a 16 y la longitud de la circunferencia que describe el punto de intersección de las diagonales es igual a 2π.

13. Calcular la altura de un prisma pentagonal regular de $440\ m^2$ de área total, si el área de la base es 50 m^2 y el apotema del pentágono mide 5 m.

14. Sea ABC-PQR un prisma triangular regular cuya arista básica mide 6 dm. Se traza un plano secante que pasa por $\overline{PB}$ y corta a $\overline{RC}$ en E. Si : EC = 4 dm y ER = 6 dm, calcular el volumen del sólido ABC-PBE.

15. Las bases de un paralelepípedo recto son rombos cuyas regiones tienen áreas igual a S_1. Las áreas de las secciones determinadas por los planos diagonales son iguales a S_2 y S_3, respectivamente. Calcular el volumen de dicho paralelepípedo.

16. Calcular el volumen de un rectoedro, cuyas dimensiones son congruentes, a las aristas básicas de un prisma recto triangular de volumen "V", cuya altura es igual al duplo del diámetro de la circunferencia circunscrita a su base.

17. El área de una de las caras de un prisma triangular es de 24 u^2 y la arista opuesta dista de dicha cara en 10 unidades. Calcular el volumen de dicho prisma.

18. Calcular el volumen de un cilindro recto circunscrito a un prisma triangular regular, cuyas caras laterales son cuadradas y el área de la base dicho prisma es de $3\sqrt{3}\ u^2$.

19. Calcular el volumen de un prisma triangular regular circunscrito a una esfera de 6 unidades de diámetro.

20. Calcular el área total de un cilindro recto circunscrito a una esfera de 12 unidades de radio.

Problemas propuestos

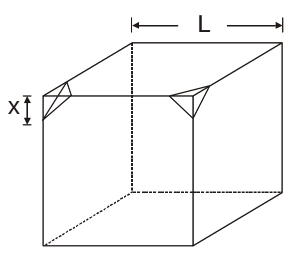
21. La base de un paralelepípedo recto es un rombo, cuya área es igual a S.
Las áreas de las secciones diagonales son iguales a S_1 y S_2. Hallar el volumen del paralelepípedo.

a) $\sqrt{\dfrac{S.S_1.S_2}{2}}$ b) $\sqrt{\dfrac{S.S_1.S_2}{4}}$

c) $\sqrt{\dfrac{S.S_1.S_2}{3}}$ d) $\sqrt{\dfrac{S.S_1.S_2}{5}}$

e) $\sqrt{\dfrac{S.S_1.S_2}{6}}$

22. En un cubo de arista L, a una distancia de "x" unidades de cada vértice sobre la arista, se efectúan cortes como indica la figura (pirámide triangular). Si la suma de los volúmenes de estas pirámides es igual a la quinta parte de lo que queda, la razón x/L, es :



a) 1/6 b) 1/5 c) 1/4
d) 1/3 e) 1/2

23. La base de una pirámide triangular regular de 24 unidades cúbicas de volumen, descansa sobre una mesa, frente a la cual está un espejo en posición vertical. Si las imágenes de los vértices de dicha base distan 7,7 y 13 unidades de la superficie del espejo, ¿cuál es la altura de la pirámide?

a) $5\sqrt{3}$ b) 6 b) $4\sqrt{3}$
d) $2\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{3}$

24. Se tiene un tronco de prisma recto de bases planas ABCD y D' C' B' A'. La primera base es un cuadrado de 7 cm de lado y la segunda es un paralelogramo. Hallar el volumen del sólido, sabiendo que las aristas AA' = 4 cm; BB' = 5 cm y CC' = 10 cm.

a) 228 cm^3 b) 268 c) 286
d) 300 e) 343

25. Hallar el volumen del sólido formado al unir los puntos medios de las aristas de hexaedro regular, cuya arista mide 8 cm.

a) 512 cm^3 b) 1024/3 d) 1280/3
d) 1160/3 e) 1536/3

26. Se tiene un tetraedro regular ABCD cuya arista mida "a" y tal que sus vértices se encuentran sobre la superficie de un cilindro recto que tiene por generatriz la arista AB. Hallar el volumen del cilindro.

a) $\dfrac{4\pi a^3}{25}$ b) $\dfrac{3\pi a^3}{16}$ c) $\dfrac{5\pi a^3}{28}$

d) $\dfrac{9\pi a^3}{32}$ e) $\dfrac{7\pi a^3}{40}$

27. Se tiene un tronco de cilindro circular recto en el que su volumen es numéricamente igual al valor de su área lateral. Si la diferencia entre las generatrices máxima y mínima del tronco de cilindro es π, hallar la longitud de la elipse que constituye su base superior.

a) $\pi\sqrt{5}$ b) $\pi\sqrt{7}$ c) $2\pi\sqrt{5}$
d) $2\pi\sqrt{7}$ e) 4π

28. Una chimenea de 3m de altura tiene forma prismática hexagonal regular. Hallar su espesor, si el volumen de fábrica es igual al volumen interior. El lado del hexágono interior $\sqrt{2}$.

a) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(2-\sqrt{2})m^2$ b) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(3-\sqrt{2})$

c) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(2-\sqrt{2})$ d) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-\sqrt{2})$

e) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}(3-\sqrt{3})$

29. Calcular el volumen de un cilindro oblicuo, si la sección recta es un círculo de 4 cm^2 de área y forma con el plano de la base un diedro de 45º, además la distancia de pie de la altura a la generatriz cuyo extremo se traza la altura es $2\sqrt{3}$ cm.

a) $16\sqrt{2}$ b) $8\sqrt{3}$ c) $12\sqrt{2}$
d) $16\sqrt{3}$ e) $16\sqrt{2}$

30. Hallar el volumen de un tronco de cilindro recto de revolución en donde la generatriz mayor es "a" y la menor es nula, las bases forman un diedro de 45º.

a) $a^3\pi$ b) $\pi\sqrt{2}a^3$ c) $\dfrac{\pi a^3}{8}$
d) $\dfrac{a^3\pi}{2}$ e) $\dfrac{\pi a^3}{3}$

31. En un tronco de cilindro circular recto, la diferencia de la generatriz máxima y la mínima es de π dm. Si el volumen es numéricamente igual al área lateral, calcular el perímetro de la base elíptica.

a) $\pi\sqrt{5}$ dm b) $10\pi\sqrt{5}$ c) $2\pi\sqrt{5}$
d) $4\pi\sqrt{3}$ e) $2\pi\sqrt{2}$

32. Calcular el volumen de un tronco cilindro oblicuo, conociendo que la sección recta es un círculo y forma con la base mayor un diedro de 45º; además, el área de la base mayor es de 60 u^2 y las generatrices máxima y mínima miden 10 dm y 4 dm en ese orden.

a) $240\sqrt{6}\,dm^3$ b) $160\sqrt{3}$
c) $210\sqrt{2}$ d) $190\sqrt{3}$
e) $220\sqrt{2}$

33. Hallar el volumen de un tronco de cilindro recto circunscrito a una esfera de radio 2. El diámetro de la base mide 6 y la generatriz mínima del tronco es nula.

a) 60π b) 45π c) 12π
d) 36π e) 40π

34. La base de un prisma recto, cuya altura es igual a 1 m; es un rombo con lados iguales a 2 cm y ángulo agudo de 30º. Por un lado de la base se traza un plano secante entre él y el plano de la base, forman un ángulo igual a 60º. Hallar el área de la sección.

a) $\dfrac{8\sqrt{3}}{3}$ b) $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ c) $\dfrac{4\sqrt{3}}{3}$
d) $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$ e) $\dfrac{3\sqrt{3}}{3}$

35. Hallar el área lateral de un cilindro de revolución, sabiendo que una sección perpendicular a la base tiene área $2m^2$ y determinar, en ellas arcos, de medida 90º?

a) $2\pi cm^2$ b) π c) $\pi\sqrt{2}$
d) $2\pi\sqrt{2}$ e) 2π

36. Una población tiene 500 habitantes que consumen en promedio por persona 12 litros de agua diariamente. Determinar el radio de un pozo cilíndrico que abastezca a la población y que tenga capacidad para una reserva de 25% del consumo diario y tal que la altura sea 4 veces el diámetro.

a) $\sqrt[3]{\dfrac{25}{\pi}}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{50}{\pi}}$ c) $\sqrt[3]{\dfrac{75}{\pi}}$
d) $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{25}{\pi}}$ e) $\dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{75}{\pi}}$

37. Sea ABC-FED un tronco de prisma triangular recto, donde la base recta es el triángulo rectángulo isósceles ABC de hipotenusa AC = $3\sqrt{2}$. La otra base FED es un triángulo equilátero y cuya cara lateral es un rectángulo cuya altura es una arista lateral y mide 6 dm. Calcular el volumen de dicho tronco.

a) 33,6 dm^3 b) 41,5 c) 30,6
d) 631,5 e) 45,7

38. En un tronco de cilindro circular recto, la generatriz mínima es nula y las bases forman un diedro de ángulo rectilíneo igual a 60º. Calcular el volumen del sólido, si la suma de las áreas de las bases es 48 π dm^2.

a) 695,32 dm^3 b) 965,23
c) 895,32 d) 348,23
e) 665,32

39. ABCD-AEFD es un tronco de prisma recto, donde la base recta ABCD es un trapecio isósceles cuyas bases $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$ miden 10 dm y 20 dm, en ese orden. Si $\overline{AB}$ mide 13 dm y las bases forman un diedro de 60º, calcular el área de la base AEFD.

a) 460 dm^2 b) 260 c) 360
d) 480 e) 370

40. En un tronco de cilindro circular recto, se encuentra inscrita una esfera de radio igual a 6 dm. El eje mayor de la elipse forma un ángulo de 37º con la generatriz máxima. Determinar el volumen de dicho tronco.

a) 576π b) 496π c) 136π
d) 468π e) 586π

41. Un tronco de cilindro oblicuo tiene como sección recta a un círculo de 8π dm de perímetro. Las generatrices máxima y mínima miden 14 dm y 4 dm, en ese orden. Calcular la relación entre el volumen y la generatriz mayor del tronco.

a) $\frac{72}{7}\pi dm^2$ b) $\frac{62}{5}\pi$ c) $\frac{27}{8}\pi$
d) $\frac{47}{5}\pi$ e) $\frac{73}{6}\pi$

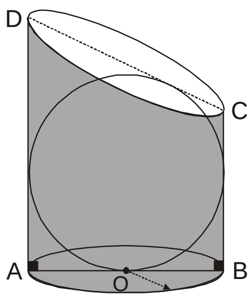
42. Grafique al triángulo ABC, de modo que :
AB = 6 dm, BC = 8 dm, y AC = 10 dm. Perpendicularmente a su plano se levanta $\overline{AE}$, $\overline{BF}$ y $\overline{CH}$ que miden 2 dm, 8 dm y 4 dm en ese orden. Calcular el volumen del sólido ABC-EFH.

a) $112\ dm^3$ b) 168 c) 336
d) 224 e) 102

43. En un tronco de cilindro circular recto, las generatrices máxima y mínima miden 10 dm y 4 dm en ese orden. Si el diámetro de la base circular es congruente al eje del sólido, calcular el área lateral del sólido.

a) $48\pi dm^3$ b) 72π c) 49π
d) 94π e) 98π

44. La figura muestra a un tronco de cilindro recto, donde el área de la sección ABCD es de 18 dm^2 y la distancia de "O" a DC es de 3,6 dm. Calcular el volumen del tronco de cilindro recto.



a) $14\pi dm^3$ b) 24π c) 9π
c) 18π e) 21π

45. En un tronco de prisma recto (cuya sección recta es un triángulo), se inscribe una pirámide cuya base es la misma del tronco y cuyo vértice es el punto de intersección de las medianas de la otra base. Calcular la relación de volúmenes de estos sólidos.

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{1}{3}$ c) $\frac{1}{2}$
d) $\frac{2}{9}$ e) $\frac{2}{3}$

46. El lado de un cuadrado ABCD, mide $\sqrt{2}$ dm; se levantan las perpendiculares $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$ la plano del cuadrado ABCD.
Si : AE = 6 dm y CF = 9 dm, calcular el volumen del sólido de la base ABCD, aristas laterales $\overline{AE}$ y $\overline{CF}$. ($\overline{EF}$ es un arista de la parte superior del sólido).

a) 5 dm^3 b) 10 c) 12
d) 8 e) 9

47. Calcular el área total de un tronco de prisma regular, cuya base es un cuadrado de 3 dm de lado. Las bases forman un ángulo de 45º y dos aristas laterales opuestas son congruentes y de longitud igual a 8 dm.

a) 117,69 b) 123,42 c) 107,82
d) 217,69 e) 171,69

48. Se tiene un prisma recto triangular ABC-DEF inscrito en un cilindro equilátero, de modo que :
AB = $6\sqrt{3}$; BC = 6 y AC = 12.
Calcular la longitud de menor recorrido sobre la superficie lateral del cilindro para ir de B a un punto de la generatriz AD y luego hacia F.

a) $6\sqrt{4+5\pi^2}$ b) 12π
c) $3\sqrt{12+5\pi^2}$ d) $2\sqrt{36+25\pi^2}$
e) 15π

49. En la base de un cilindro de revolución se inscribe un hexágono regular ABCDEF, luego se trazan las generatrices AI, BM, DN y EO. Calcular la razón de los volúmenes del cilindro y del sólido ABDE-LMNO.

a) π b) $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$ c) $\frac{\sqrt{6}}{\pi}$
d) $\frac{\pi}{\sqrt{3}}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{\pi}$

50. Un cilindro recto contiene agua hasta cierto nivel. Se suelta un tetraedro regular metálico y el nivel del agua sube en $2\sqrt{2}$ unidades. Calcular la altura del tetraedro, si el área de la base del cilindro es de $9\pi u^2$.

a) $2\sqrt{3}\pi$ b) $\frac{2\sqrt{6}}{\pi}$ c) $\frac{12^3\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}}$
d) $\frac{4^3\sqrt{\pi}}{\sqrt{3}}$ e) $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$

51. Los puntos A y B son los extremos de una misma generatriz de un cilindro de revolución, cuyo radio de base mide 3 unidades y su altura es de 5 unidades. Calcular la mínima longitud de la curva para ir de A a B, dando una vuelta sobre la superficie lateral del cilindro.

a) 6π b) $\sqrt{50+18\pi^2}$
c) $3\sqrt{5+3\pi}$ d) $\sqrt{25+36\pi^2}$
e) 9π

52. Calcular el volumen de un cilindro recto, si el desarrollo de su superficie lateral tiene un área de 180 πu^2 y la distancia entre los centros de las bases de dicho cilindro mide 15 unidades.

a) $540\pi u^3$ b) 480π c) 440π
d) 560π e) 380π

53. El área total de un prisma triangular regular es $2\sqrt{3}\left(\frac{1+6\sqrt{3}}{2}\right)u^2$. Calcular el volumen del prisma, cuya arista lateral es el triple de la arista básica.

a) $12\,u^3$ b) $6\sqrt{3}$ c) $\frac{3}{2}\sqrt{6}$
d) $12\sqrt{3}$ e) $18\sqrt{3}$

54. Las aristas básicas de un prisma recto triangular miden 20, 21 y 29 unidades, respectivamente. Calcular el volumen del prisma, cuya arista lateral es igual al triple del inradio de la base de dicho prisma.

a) 2100 u^3 b) $1200\sqrt{3}$ c) 3780
d) $1800\sqrt{2}$ e) 4200

55. $\overline{AE}$ y $\overline{BF}$ son las generatrices menor y mayor, respectivamente, de un tronco de cilindro recto, cuyo diámetro AB de la base mide $4\sqrt{5}$ unidades. $\overline{BE}$ es perpendicular a $\overline{EF}$, de modo que : EB = 12. Calcular el volumen de dicho tronco.

a) $260\pi u^3$ b) $100\sqrt{6}\,\pi$ c) 280π
d) $120\sqrt{3}\,\pi$ e) 300π

56. Se tiene un tronco de cilindro recto, cuya generatriz menor es nula y su área lateral es igual a "S". Calcular el volumen de dicho tronco; si su área de base circular es "B".

a) $\frac{S\sqrt{B}}{3}$ b) $\frac{S}{2}\sqrt{\frac{B}{\pi}}$ c) $\sqrt{SB}$
d) $\frac{S\sqrt{B}}{2}$ e) $\frac{SB}{2\pi}$

57. Se tiene un tronco de cilindro oblicuo, cuyas generatrices menor y mayor miden "a" y "b" unidades, respectivamente. Calcular el área lateral de dicho tronco, si el área de su sección recta es "S".

a) $(a+b)\sqrt{S}$ b) $\sqrt{\pi S}\,(a+b)$
c) $\frac{\pi Sb}{a}$ d) $\frac{\pi Sa}{b}$
e) $\pi S\left(\frac{a+b}{2}\right)$

58. Calcular el volumen de un tronco de prisma recto triangular, cuya base es un triángulo rectángulo isósceles de perímetro igual a $4(1+\sqrt{2})$ unidades y las aristas laterales de dicho tronco miden 7, 9 y 11 unidades respectivamente.

a) $24\sqrt{6}\,u^3$ b) 36 c) $30\,u^3$
d) $30\sqrt{3}$ e) $32\sqrt{2}$

59. Se tiene un tronco de prisma oblicuo triangular, cuya sección recta es un triángulo rectángulo isósceles de cateto igual a 6 unidades de longitud y la distancia entre los baricentros de las bases es igual a 16 unidades. Calcular el área lateral de dicho tronco.

a) $90(2+\sqrt{2})u^2$ b) 224
c) $90(\sqrt{2}+\sqrt{6})$ d) $120(1+\sqrt{3})$
e) 288

60. Por los vértices B y C de un triángulo equilátero ABC, se levantan las perpendiculares BE y CF al plano del triángulo, de tal manera que :
BE = 11, CF = 4 y BC = 6.
Calcular el volumen del sólido ABC-EFA.

a) $60\,u^3$ b) $45\sqrt{3}$ c) 72
d) $30\sqrt{6}$ e) 90

Claves

21.	a
22.	e
23.	d
24.	e
25.	b
26.	d
27.	c
28.	c
29.	d
30.	c
31.	c
32.	c
33.	d
34.	c
35.	d
36.	b
37.	d
38.	a
39.	c
40.	a

41.	a
42.	b
43.	b
44.	b
45.	b
46.	b
47.	c
48.	d
49.	d
50.	a
51.	d
52.	a
53.	c
54.	c
55.	a
56.	b
57.	b
58.	b
59.	e
60.	b