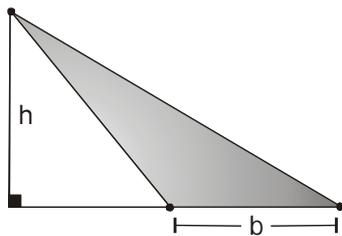
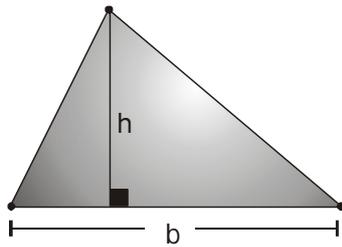


Capítulo  
**14**

# ÁREAS DE LAS REGIONES POLIGONALES Y RELACIONES DE ÁREAS

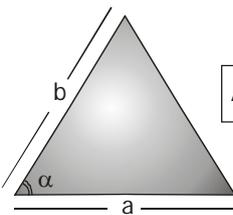
## ÁREA DE LA REGIÓN TRIANGULAR

\* **Forma Básica**



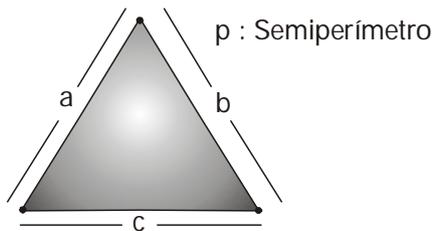
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

\* **Forma Trigonométrica**



$$A = \frac{a \cdot b}{2} \cdot \text{Sen} \alpha$$

\* **Fórmula de Herón**

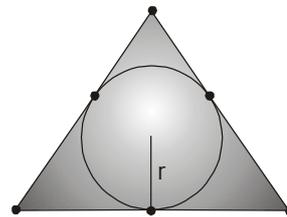


$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

## ÁREA EN FUNCIÓN DE LOS RADIOS

\* **Con el Inradio**

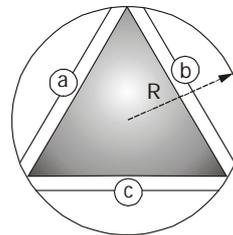
Válido para todo polígono circunscrito.



$$A = p \cdot r$$

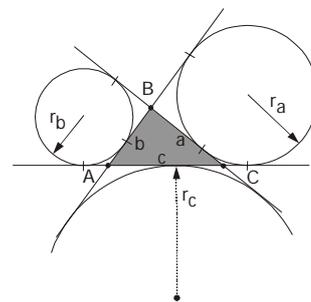
p : semiperímetro

\* **Con el Circunradio**



$$A = \frac{a \cdot b \cdot c}{4R}$$

\* **Con los Exradios**



$$A = (p-a)r_a$$

$$A = (p-b)r_b$$

$$A = (p-c)r_c$$

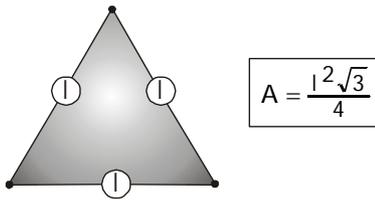
$$A = \sqrt{r_a \cdot r_b \cdot r_c}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c}$$

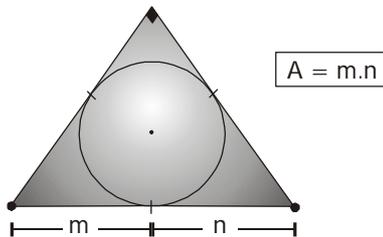
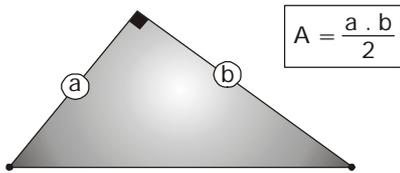
r : Inradio del triángulo ABC.

**CASOS PARTICULARES**

\* **Triángulo Equilátero**

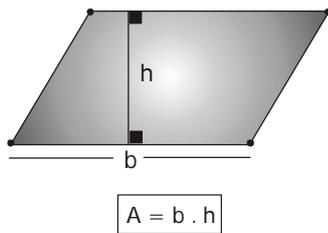


\* **Triángulo Rectángulo**

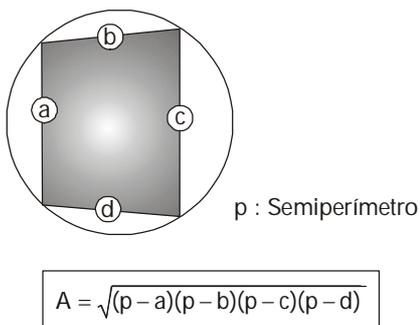


**ÁREA DE LA REGIÓN CUADRANGULAR**

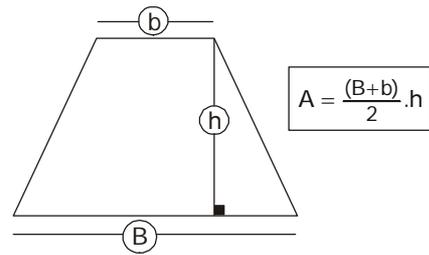
\* **Paralelogramo**



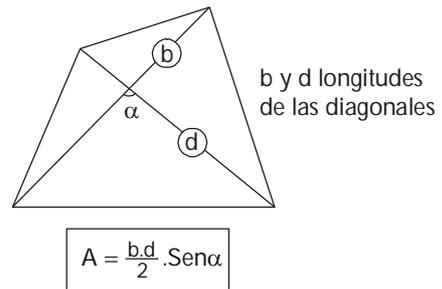
\* **Cuadrilátero Inscrito**



\* **Trapezio**

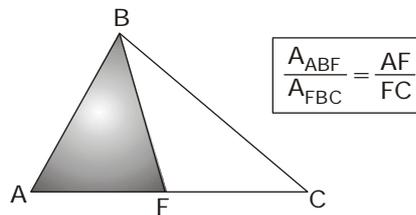


\* **Cualquier cuadrilátero**

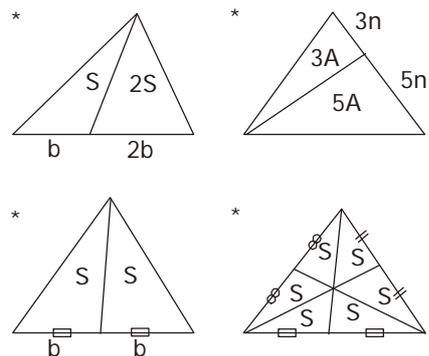


**RELACIONES DE ÁREAS**

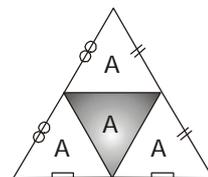
**Primera Relación**



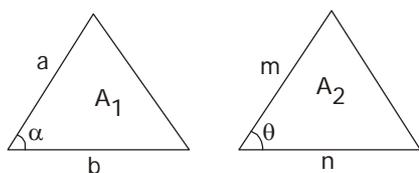
**Consecuencias :**



**Observaciones :**

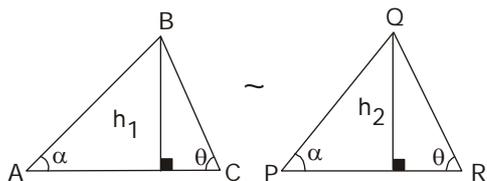


**Segunda Relación**



Si:  $\alpha = \theta$  ó  $\alpha + \theta = 180^\circ \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{a \cdot b}{m \cdot n}$

**Tercera Relación**



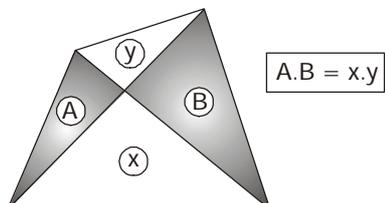
Si:  $\triangle ABC \sim \triangle PQR$

$\Rightarrow \frac{A_{ABC}}{A_{PQR}} = \frac{AC^2}{PR^2} = \frac{h_1^2}{h_2^2} = k^2$

\* Válido para todo par de polígonos semejantes.

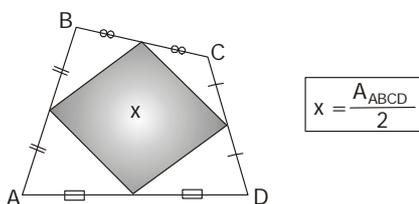
**Cuarta Relación**

**En todo cuadrilátero convexo**



$A \cdot B = x \cdot y$

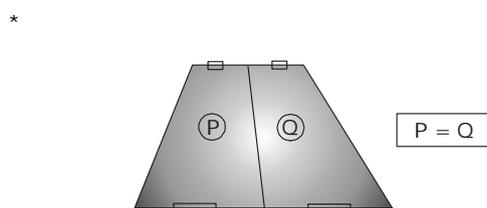
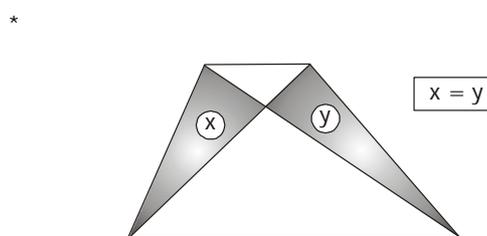
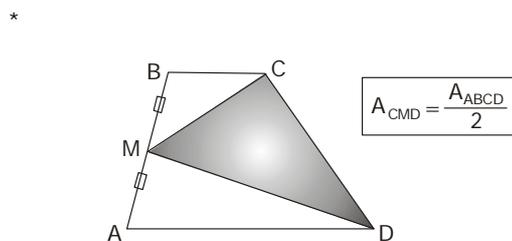
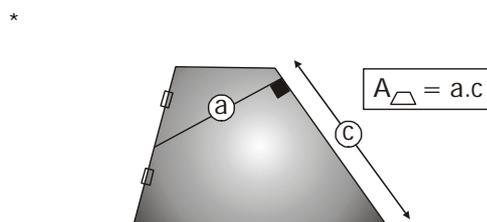
**En todo cuadrilátero**



$x = \frac{A_{ABCD}}{2}$

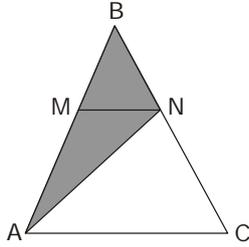
**Observaciones :**

En el trapecio, se cumple que:

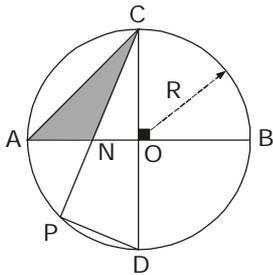


**Test de aprendizaje preliminar**

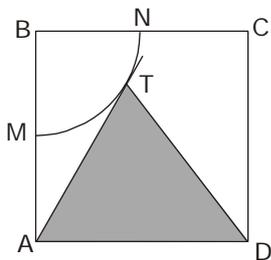
01. En la figura, el triángulo ABC es equilátero y  $\overline{MN} \parallel \overline{AC}$ . Hallar el área de la región triangular ABN, si: AC = 12 y AM = 10.



02. Hallar el área de la región triangular ACN, si: R = 20 y PD = 24.

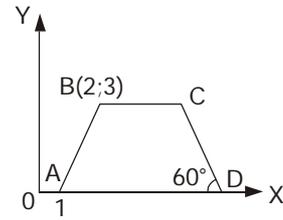


03. En la figura se tienen un cuadrado cuyo lado mide 2, si M y N son puntos medios. Hallar el área de la región sombreada. (T : punto de tangencia).

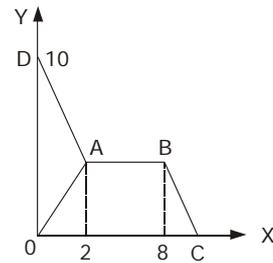


04. ABCD es un trapecio cuya área de su región es igual a  $\frac{3(7+\sqrt{3})}{2} \text{ m}^2$ .

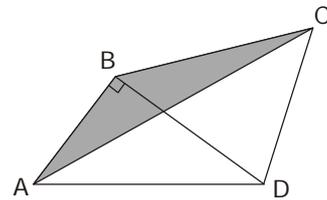
Hallar la abscisa del vértice C.



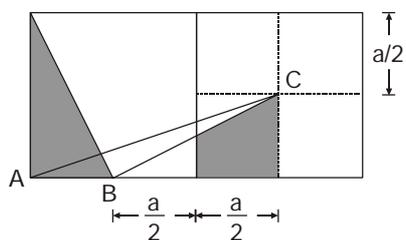
05. En la figura, el área de la región del triangular OAD es igual a los 5/16 del área del trapecio isósceles OABC. Las coordenadas del punto medio del segmento AB son:



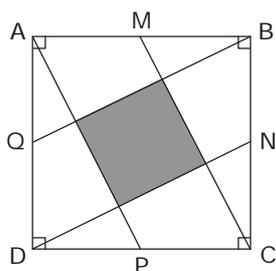
06. Hallar el área de la región del triángulo ABC, si: AD = 13, AB = 5 y el triángulo BCD es equilátero.



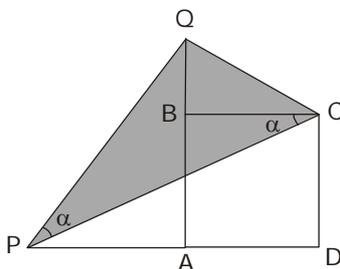
07. La siguiente figura está formada por dos cuadrados de lado "a". Si el área del triángulo ABC =  $\frac{10}{7}\pi m^2$ . Calcular el área de la región sombreada.



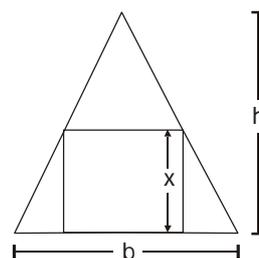
08. En la siguiente figura, M, N, P, Q; son los puntos medios de los lados del cuadrado ABCD. Si el lado del cuadrado ABCD es 25 m, calcular el área de la región sombreada.



09. Hallar el área de la región triangular PQC, si ABCD es un cuadrado y  $(PQ)(AB) = 20$ .



10. En la figura, si el triángulo tiene base "b" y altura "h", entonces, el área de la región del rectángulo inscrito es:



### Practiquemos :

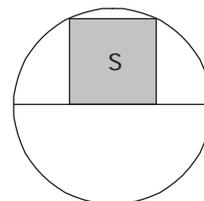
11. Calcular el área de la región de un triángulo equilátero, sabiendo que el radio de la circunferencia inscrita mide 2.
12. Se tiene un triángulo isósceles cuyos lados de igual longitud miden b cm. Para obtener un triángulo con la mayor área posible, el tercer lado debe tener una longitud de:
13. El triángulo, que puede ser inscrito en una semicircunferencia de radio "r", tiene una región cuya área es máxima y su valor es:

14. En un triángulo rectángulo de hipotenusa  $50u$  y, donde el cateto es el doble del otro, calcular el área de la región del triángulo.
15. Hallar la razón entre las áreas de una región triangular equilátera y una región cuadrada, si estas regiones son isoperimétricas.
16. El área de la región de un cuadrado es  $100\text{ m}^2$ ; está inscrito en una circunferencia. ¿Cuál es el área de la región del cuadrado que se puede inscribir en la mitad de la misma circunferencia?
17. Se tienen 3 circunferencias tangentes exteriormente dos a dos. Hallar el área de la región del triángulo que se forma al unir sus centros, si se sabe que el producto de sus radios es  $8\text{ m}^3$  y la suma de sus radios es  $6\text{ m}$ .
18. Calcular el área de la región de un triángulo equilátero que tiene por altura el radio de la circunferencia circunscrita a otro triángulo equilátero de  $18\text{ m}^2$  de área de su región.

19. En un triángulo  $ABC$ , isósceles con  $\overline{AB} \cong \overline{BC}$ , la altura que parte de  $B$  mide  $8\text{ m}$  y el perímetro  $32\text{ m}$ . El área de la región triangular es:
20. Si en un triángulo las alturas miden  $12\text{ cm}$ ,  $15\text{ cm}$  y  $20\text{ cm}$ , entonces, el área de su región en  $\text{cm}^2$  es:

### Problemas propuestos

21. Los radios de las circunferencias exinscritas relativas a los catetos de un triángulo rectángulo miden  $4$  y  $8$ . Hallar el área de la región del triángulo.
- a) 100      b) 12      c) 32  
d) 80      e) 16
22. En un triángulo, sus exradios valen  $2u$ ,  $3u$  y  $6u$ . Hallar el área de la región triangular.
- a)  $12\text{ u}^2$       b)  $2\text{ u}^2$       c)  $6\text{ u}^2$   
d)  $16\text{ u}^2$       e)  $8\text{ u}^2$
23. Tres lados de un cuadrilátero convexo valen  $3u$ ,  $4u$  y  $3u$ . ¿Cuál de los siguientes valores puede ser el área de la región cuadrangular?
- a)  $13\text{ u}^2$       b)  $14\text{ u}^2$       c)  $15\text{ u}^2$   
d)  $18\text{ u}^2$       e)  $26\text{ u}^2$
24. En un semicírculo, se encuentra inscrito un cuadrado "S" de  $120\text{ cm}^2$  de área. Determinar el área de la región del cuadrado inscrito en todo el círculo.



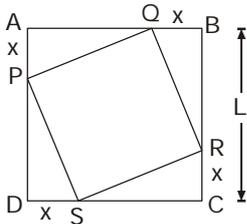
- a)  $240\text{ cm}^2$       b)  $300\text{ cm}^2$       c)  $600\text{ cm}^2$   
d)  $220\text{ cm}^2$       e)  $150\text{ cm}^2$

25. En un triángulo ABC se traza la circunferencia ex-inscrita relativo al lado  $\overline{BC}$ , tangente en M y P las prolongaciones de los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  respectivamente, siendo "O" centro de dicha circunferencia. Si :  $AB = 10$ ,  $BC = 17$  y  $AC = 21$ . Hallar el área de la región triangular OMP.
- a) 47,6      b) 57,6      c) 67,6  
d) 77,6      e) 71,2
26. En un triángulo ABC, se sabe que  $AB = 8$ ,  $BC = 9$ . ¿Para qué valor de AC el área de la región triangular ABC será máxima?
- a) 16      b) 17      c)  $\sqrt{145}$   
d)  $\sqrt{135}$       e)  $\sqrt{115}$
27. En un triángulo isósceles, la base mide 15 y la altura relativa a uno de los lados iguales mide 12. Calcular el área de la región triangular.
- a) 50      b) 75      c) 90  
d) 100      e) 150
28. Los lados de un triángulo miden  $\sqrt{26}$ ,  $\sqrt{18}$  y  $\sqrt{20}$ . Calcular el área de esta región triangular.
- a) 6      b) 9      c) 12  
d) 15      e) 18
29. La longitud del lado de un cuadrado ABCD es 6 cm. Se construye exteriormente el triángulo equilátero CED y se traza  $\overline{AE}$ . Calcular el área de la región triangular AED.
- a)  $6\text{ cm}^2$       b)  $9\text{ cm}^2$       c)  $12\text{ cm}^2$   
d)  $8\text{ cm}^2$       e)  $10\text{ cm}^2$
30. La base de un triángulo isósceles es  $\sqrt{2}$ . Si las medianas trazadas hacia los lados congruentes se cortan perpendicularmente, entonces, el área de la región triangular es :
- a) 2      b) 3      c) 1,5  
d) 2,5      e) 3,5
31. En un triángulo ABC, se conoce que la altura  $\overline{BH}$  y la mediana  $\overline{BM}$  trisecan al ángulo ABC. Calcular el área de la región triangular ABC, si:  $HM = 1\text{m}$ .
- a)  $2\sqrt{2}\text{ m}^2$       b)  $4\sqrt{2}\text{ m}^2$       c)  $2\sqrt{3}\text{ m}^2$   
d)  $4\sqrt{3}\text{ m}^2$       e)  $8\sqrt{3}\text{ m}^2$
32. Las alturas de un triángulo miden  $6u$ ,  $8u$  y  $12u$ . Hallar el área de la región triangular.
- a)  $24\sqrt{5}\text{ u}^2$       b)  $\frac{32}{5}\sqrt{5}\text{ u}^2$       c)  $\frac{16}{3}\sqrt{5}\text{ u}^2$   
d)  $\sqrt{455}\text{ u}^2$       e)  $\frac{64}{5}\sqrt{15}\text{ u}^2$
33. En un hexágono regular de lado L, se unen los puntos medios de cuatro lados opuestos dos a dos. Luego, se unen los puntos medios de los lados del rectángulo que se formó, obteniéndose un cuadrilátero. Hallar el área de la región limitada por este cuadrilátero.
- a)  $(\sqrt{3}/8)L^2$       b)  $(3\sqrt{3}/4)L^2$       c)  $(3\sqrt{3}/8)L^2$   
d)  $(\sqrt{3}/4)L^2$       e)  $(\sqrt{3}/2)L^2$
34. Desde el vértice de uno de los ángulos agudos de un rombo se trazan perpendiculares de 2 cm de longitud hacia las prolongaciones de los lados opuestos. Si la distancia entre los pies de dichas perpendiculares es 3cm. Hallar el área de la región limitada por el rombo.
- a)  $\frac{32}{3\sqrt{7}}$       b)  $\frac{30}{\sqrt{7}}$       c)  $\frac{35}{2\sqrt{7}}$   
d)  $\frac{36}{5\sqrt{6}}$       e)  $\frac{39}{2\sqrt{6}}$
35. El área de la región triangular es de  $150\text{m}^2$ . Además, se sabe que el segmento que une el punto de intersección de las medianas con el punto de intersección de las bisectrices es paralelo a uno de los catetos. Calcular los catetos.
- a) 60 m y 5 m      b) 25 m y 12 m  
c) 15 m y 20 m      d) 30 m y 10 m  
e) 50 m y 6 m
36. ABCD es un cuadrado. E está en  $\overline{AD}$  y F está en la prolongación de  $\overline{DC}$ , de modo que  $\overline{EB} \perp \overline{FB}$ . Si el área de la región ABCD es 256 y el área de la región triangular EBF es 200, determinar CF.
- a)  $25\sqrt{3}/3$       b) 9      c)  $20\sqrt{3}/3$   
d) 12      e)  $17\sqrt{2}/3$
37. De todos los rectángulos de perímetro 24 y dimensiones enteras, las dimensiones del rectángulo de área máxima:
- a) Son 5 y 7.  
b) Son 8 y 4.  
c) Son 9 y 3.  
d) No pueden determinarse.  
e) 6 y 6.
38. Sobre los catetos de un triángulo rectángulo ABC, de longitudes 5 y 7 respectivamente, construimos dos triángulos rectángulos isósceles ADB y BEC, tomando  $\overline{AB}$  y  $\overline{BC}$  por hipotenusas. Calcular el área de la región del polígono resultante.
- a) 30      b) 26      c) 28  
d) 36      e) 45

39. En un triángulo rectángulo, cuyos catetos tienen una longitud de 50 m y 120 m, se inscribe un rectángulo que tiene dos de sus lados contenidos por los catetos y uno de sus vértices está en la hipotenusa. Determinar el área máxima de dicha región rectangular.

- a) 1200 m<sup>2</sup>    b) 1500 m<sup>2</sup>    c) 1750 m<sup>2</sup>  
 d) 2000 m<sup>2</sup>    e) 2500 m<sup>2</sup>

40. Sobre los lados de un cuadrado ABCD, de lado igual a "L" se localizan, a igual distancia de los vértices, los puntos P, Q, R y S, que al unirse determinan el cuadrilátero PQRS tal como se muestra en la figura. Entonces, los valores de x que hacen que la región PQRS tenga área mínima y máxima, son respectivamente.

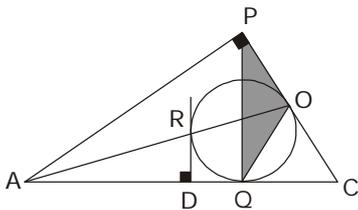


- a) L/3, L/2    b) L/2, L/4    c) 0, L/2  
 d) L/5, L    e) L/2, 0

41. Hallar el área de la región de un polígono regular inscrito en una circunferencia de radio R, sabiendo que el doble de su perímetro es igual al perímetro del polígono regular del mismo número de lados, pero circunscrito a la circunferencia dada.

- a)  $\frac{3}{4}\sqrt{3}R^2$     b)  $\frac{2}{3}\sqrt{3}R^2$     c)  $\frac{4}{5}\sqrt{2}R^2$   
 d)  $2R^2$     e)  $\frac{6}{5}\sqrt{2}R^2$

42. En el gráfico, hallar el área de la región sombreada, si: PO = 16. (Q, R, O → punto de tangencia).

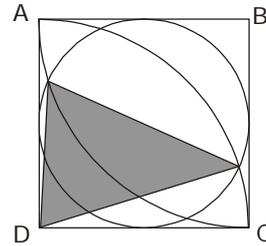


- a) 256    b) 135    c) 128  
 d) 144    e) 121

43. Sobre cada uno de los lados de un triángulo equilátero se construyen exteriormente cuadrados, cuyos perímetros son iguales a 16 unidades. Calcular el área de la región triangular cuyos vértices son los centros de los cuadrados.

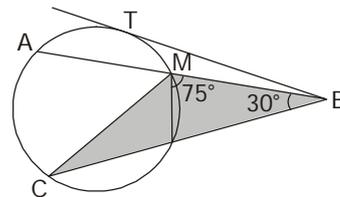
- a) 16    b)  $2(2\sqrt{3} + 3)$     c)  $4(2\sqrt{3} + 3)$   
 d)  $8(2\sqrt{3} + 3)$     e)  $4(\sqrt{3} + \sqrt{2})$

44. Siendo ABCD un cuadrado de lado "a"; hallar el área de la región sombreada, si A y C son centros de los arcos  $\overline{BD}$ .



- a)  $\frac{a^2\sqrt{7}}{4}$     b)  $\frac{a^2\sqrt{14}}{2}$     c)  $\frac{a^2\sqrt{14}}{3}$   
 d)  $\frac{a^2\sqrt{7}}{8}$     e)  $\frac{a^2\sqrt{21}}{4}$

45. Según el gráfico, calcular el área de la región sombreada; si TB = a. ("T" es punto de tangencia).



- a)  $a^2/2$     b)  $a^2/4$     c)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$   
 d)  $a^2$     e)  $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

46. Sea ABC un triángulo rectángulo isósceles ( $m\angle B = 90^\circ$ ). Exteriormente, construya el cuadrado ACDE.  $\overline{BE}$  y  $\overline{BD}$  cortan a  $\overline{AC}$  en los puntos "M" y "N" en ese orden. Si el área de la región triangular MBN es de "S" cm<sup>2</sup>. Calcular el área de la región cuadrada ACDE.

- a) 6.S cm<sup>2</sup>    b) 8.S cm<sup>2</sup>    c) 10.S cm<sup>2</sup>  
 d) 12.S cm<sup>2</sup>    e) 24.S cm<sup>2</sup>

47. En una circunferencia, de centro "O" y diámetro  $\overline{AB}$ , se ubica el punto "P", tal que: AP = PB; se trazan las cuerdas  $\overline{PS}$  y  $\overline{PR}$  y que intersectan a  $\overline{AB}$  en los puntos M y N, se traza  $\overline{RH}$  perpendicular a  $\overline{AB}$ , si: AM = 4; NH = 2 y HB = 1. Además:  $m\angle SOR = 90^\circ$ . Calcular el área de la región triangular MNR.

- a)  $\frac{5\sqrt{11}}{2}u^2$     b)  $6\sqrt{13}u^2$     c)  $\frac{3\sqrt{11}}{2}u^2$   
 d)  $\frac{\sqrt{171}}{2}u^2$     e)  $\frac{2\sqrt{17}}{3}u^2$

48. Se tiene un cuadrado ABCD, sobre  $\overline{BC}$  y  $\overline{CD}$  se ubican los puntos M y N respectivamente. Si :  $BM = 3u$ ;  $ND = 2u$ , calcular el área de la región triangular MCN, si la  $m \angle MAN = 45^\circ$ .

- a)  $24 u^2$       b)  $12 u^2$       c)  $6 u^2$   
 d)  $15 u^2$       e)  $25 u^2$

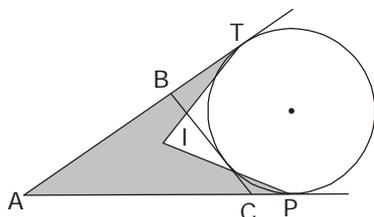
49. Las áreas de las regiones del octágono regular y del dodecágono regular inscritos en una misma circunferencia están en la relación de :

- a)  $\sqrt{2}/3$       b)  $3\sqrt{2}/2$       c)  $2\sqrt{2}/3$   
 d)  $\sqrt{2}/4$       e)  $3\sqrt{2}/4$

50. Un triángulo ABC, se encuentra inscrito en una circunferencia de radio R; se traza la altura  $\overline{AH}$  y luego las perpendiculares  $\overline{HP}$  y  $\overline{HQ}$  y hacia los lados  $\overline{AB}$  y  $\overline{AC}$  (en ese orden). Si :  $PQ = a$ , calcular el área de la región triangular ABC.

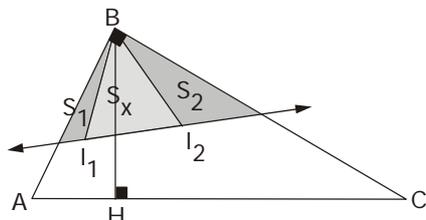
- a)  $\frac{aR}{2}$       b)  $(\sqrt{a} + \sqrt{R})^4$       c)  $aR$   
 d)  $a^2\sqrt{R}$       e)  $(a+R)^2$

51. En la figura,  $AB = 7$  y  $BC = 6$  y  $AC = 11$ . Calcular el área de la región sombreada, si "I" es incentro del triángulo ABC. (T, P y R, puntos de tangencia).



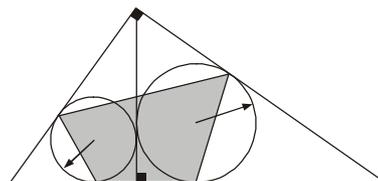
- a)  $6\sqrt{10}$       b)  $8\sqrt{6}$       c)  $10\sqrt{5}$   
 d)  $12\sqrt{3}$       e) 24

52. Del gráfico, si  $I_1$  e  $I_2$  son los incentros de los triángulos ABH y HBC, respectivamente, hallar el área de la región "Sx" en función de  $S_1$  y  $S_2$ .



- a)  $S_1 + S_2$       b)  $\frac{S_1 + S_2}{2}$       c)  $\sqrt{S_1 S_2}$   
 d)  $\sqrt{S_1^2 + S_2^2}$       e)  $\frac{S_1 S_2}{S_1 + S_2}$

53. Si los radios de los círculos son 3 y 4, hallar el área de la región sombreada.



- a) 50      b) 51,2      c) 53,6  
 d) 56,9      e) 56,4

54. Exteriormente a los lados del triángulo ABC se construyen los triángulo rectángulo APB, BQC y ALC, tal que :  $PC \perp AB$ ,  $BC \perp AQ$  y  $AC \perp BL$ . Hallar el área de la región triangular ABC si el área de los regiones triangulares APB, BQC y ALC son 1, 2 y 3  $u^2$ , respectivamente.

- a)  $2\sqrt{7} u^2$       b)  $\sqrt{13} u^2$       c)  $7\sqrt{2} u^2$   
 d)  $\sqrt{14} u^2$       e)  $3\sqrt{21} u^2$

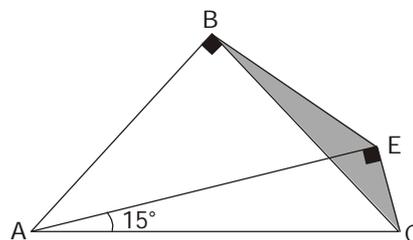
55. El área de la región triangular ABC es  $5m^2$ ; se tiene una recta exterior al triángulo a la cual se trazara las perpendiculares  $\overline{AP}$ ,  $\overline{BQ}$  y  $\overline{CR}$ . Hallar el área de la región triangular que se forma al unir los puntos medios de :  $\overline{AP}$ ,  $\overline{BQ}$  y  $\overline{CR}$ .

- a)  $10 m^2$       b)  $3 m^2$       c)  $3,5 m^2$   
 d)  $2 m^2$       e)  $2,5 m^2$

56. Si la altura de un trapecio rectángulo es 6 y sus diagonales son perpendiculares, hallar el área mínima de la región limitada por el trapecio.

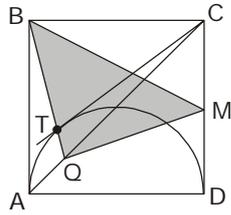
- a) 12      b) 72      c) 36  
 d) 24      e) 8

57. En la figura mostrada, calcular el área de la región sombreada, siendo:  $AB = 2\sqrt{2} m$  y  $AB = BC$ .



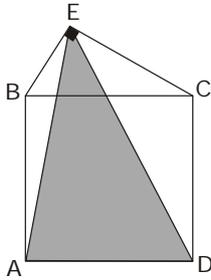
- a)  $6\sqrt{2} m^2$       b)  $(\sqrt{3} - 1) m^2$       c)  $2\sqrt{2} m^2$   
 d)  $(6\sqrt{3} - 1) m^2$       e)  $2\sqrt{3} m^2$

58. En la figura, si ABCD es un cuadrado,  $CM = MD$ , calcular el área de la región sombreada, siendo:  $AB = 4m$ . (T : punto de tangencia).



- a)  $2 m^2$       b)  $4 m^2$       c)  $5 m^2$   
 d)  $6 m^2$       e)  $7 m^2$

59. Del gráfico mostrado, hallar el área de la región sombreada, si :  $BE = a$ ,  $EC = b$ ,  $a^2 + b^2 + ab = 5$ . ABCD : cuadrado.



- a) 5                      b)  $5/2$                       c)  $5/3$   
 d) 25                    e) 35

60. En un triángulo ABC inscrito en una circunferencia de centro "O", se trazan los diámetros  $\overline{AD}$ ,  $\overline{CF}$  y  $\overline{BE}$ , las áreas de las regiones triangulares BDC, AFB y AEC miden 5, 3 y  $4m^2$  respectivamente. Calcular el área de la región triangular ABC.

- a)  $10 m^2$       b)  $12 m^2$       c)  $14 m^2$   
 d)  $18 m^2$       e)  $15 m^2$

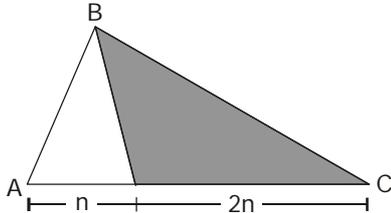
# Claves

21.	<i>c</i>
22.	<i>c</i>
23.	<i>a</i>
24.	<i>b</i>
25.	<i>b</i>
26.	<i>c</i>
27.	<i>b</i>
28.	<i>b</i>
29.	<i>b</i>
30.	<i>c</i>
31.	<i>c</i>
32.	<i>b</i>
33.	<i>c</i>
34.	<i>a</i>
35.	<i>c</i>
36.	<i>d</i>
37.	<i>a</i>
38.	<i>d</i>
39.	<i>b</i>
40.	<i>e</i>

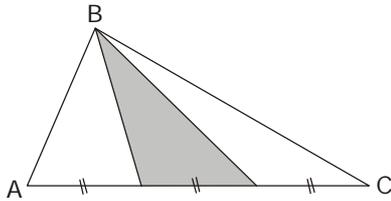
41.	<i>a</i>
42.	<i>c</i>
43.	<i>b</i>
44.	<i>d</i>
45.	<i>a</i>
46.	<i>d</i>
47.	<i>a</i>
48.	<i>c</i>
49.	<i>b</i>
50.	<i>c</i>
51.	<i>a</i>
52.	<i>d</i>
53.	<i>e</i>
54.	<i>d</i>
55.	<i>e</i>
56.	<i>c</i>
57.	<i>b</i>
58.	<i>c</i>
59.	<i>b</i>
60.	<i>b</i>

# RELACIÓN DE ÁREAS DE REGIONES POLIGONALES

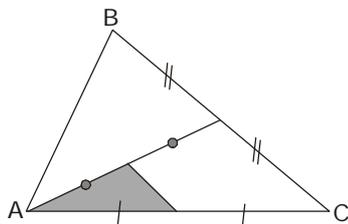
01. Si el área del triángulo ABC es de  $90 \text{ dm}^2$ , calcular el área de la región sombreada.



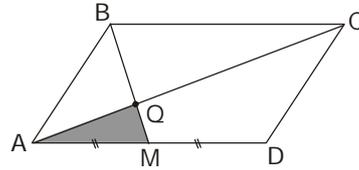
02. El área de la región sombreada es de  $12 \text{ dm}^2$ . Calcular el área de la región triangular ABC.



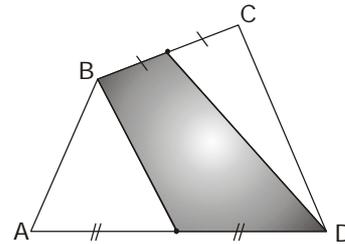
03. ¿Qué fracción del área de la región del triangular ABC, representa el área de la región sombreada?



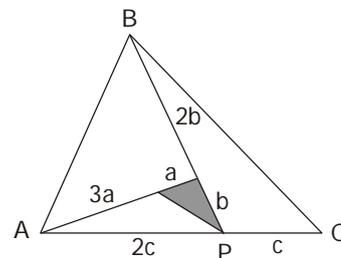
04. Si el área del paralelogramo ABCD es de  $24 \text{ cm}^2$ , calcular el área de la región sombreada.



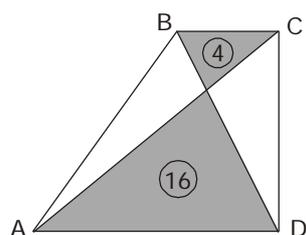
05. El área de la región cuadrangular ABCD es de  $48 \text{ dm}^2$ . Calcular el área de la región sombreada.



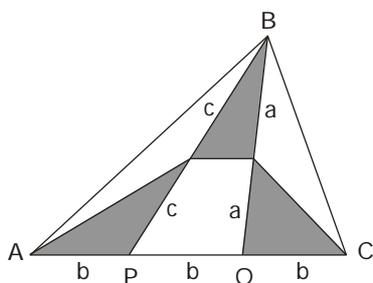
06. Si el área de la región del triángulo ABC es  $36 \text{ u}^2$ , calcular el área de la región sombreada.



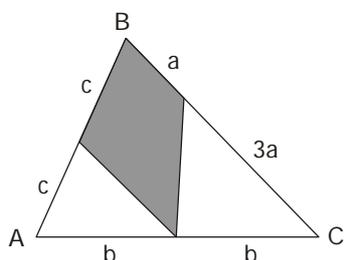
07. Calcular el área de la región del trapecio mostrado.



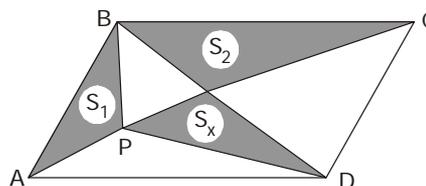
08. El área de la región triangular ABC es  $24 \text{ m}^2$ . Calcular el área de la región sombreada.



09. Si el área de la región del triángulo ABC es  $40 \text{ u}^2$ , calcular el área de la región sombreada.



10. En la figura, ABCD es un paralelogramo. Calcular  $S_x$ .



### Practiquemos :

11. En un trapecio cuyas bases miden  $3\text{m}$  y  $1\text{m}$ , se traza una paralela a las bases para dividirlo en dos figuras equivalentes. ¿Cuál es la longitud de dicha paralela?

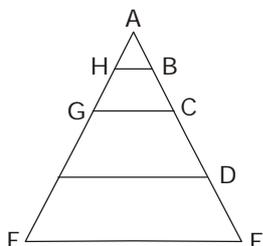
12. En un cuadrilátero convexo ABCD, se toma el punto medio M de la diagonal  $\overline{AC}$ . Calcular el área de la región triangular MBD, sabiendo que las áreas de la región de los triángulos ABD y BDC miden  $40$  y  $60 \text{ m}^2$ , respectivamente.

13. Sea un cuadrilátero ABCD; los puntos medios de sus lados determinan el paralelogramo PQRS; los puntos medios de los lados de éste determinan otro paralelogramo MNLT. Si los puntos medios de este último determinan un rombo que limita una región de  $72\text{m}^2$ , entonces, el área de la región del cuadrilátero ABCD, es :

14. En un triángulo ABC, se traza el segmento  $\overline{BD}$  con D sobre el lado  $\overline{AC}$ . También trazamos el segmento  $\overline{CE}$  con E sobre el lado  $\overline{AB}$ . Si sabemos que:
- $$\frac{AB}{AC} = \frac{13}{36} \text{ y } \frac{CD}{AE} = \frac{12}{5}, \text{ hallar: } \frac{\text{Área}(\triangle BDC)}{\text{Área}(\triangle AEC)}.$$
15. Dado un triángulo equilátero cuya área de su región es  $9\sqrt{3}u^2$ . Se traza dos rectas paralelas a la base, que dividen al triángulo en tres regiones equivalentes. ¿Cuál es la longitud de la paralela más cercana a la base?
16. Dado un triángulo ABC, cuya área de su región es  $18 \text{ m}^2$ , se traza la altura BH. Si la mediatriz de  $\overline{AC}$  interseca a BC en N, calcular el área de la región cuadrangular ABNH.
17. En un triángulo ABC, se trazan las alturas  $\overline{AH}$  y  $\overline{CP}$ . Calcular la razón entre el área de la región triangular PBH y el área de la región cuadrangular APHC, si además:  $m \angle ABC = 53^\circ$ .
18. Hallar el área de la región de un triángulo isósceles ABC, sabiendo que:  $AB = BC = 30 \text{ cm}$ , y que la perpendicular a  $\overline{BC}$  en su punto medio M, corta a  $\overline{AB}$  en E y que:
- $$\frac{AE}{EB} = \frac{1}{5}$$
19. Las diagonales de un trapecio dividen a éste en cuatro triángulos. Hallar el área del trapecio, si las áreas de los triángulos adyacentes a las bases son iguales a  $1,69 \text{ cm}^2$  y  $1,21 \text{ cm}^2$ .
20. Se tiene un cuadrilátero ABCD, siendo "O" punto de la intersección de sus diagonales. Sabiendo que:  $OA = x, OB = 2x, OC = 8x, OD = 5x$ , y que el área de la región triangular BOC es igual a  $48 \text{ m}^2$ ; el área de la región del cuadrilátero, en  $\text{m}^2$ , será:

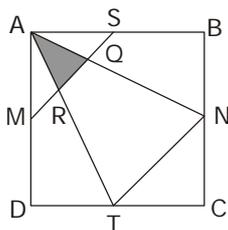
### Problemas propuestos

21. En la figura,  $2AB = AC = CD = DE$  y las rectas horizontales son paralelas. Sea :  
 $x =$  área de la región triangular  $ABH$  y sea:  $z =$  área del cuadrilátero  $FGCE$ . Luego,  $\frac{x}{z}$  es:



- a)  $\frac{1}{16}$       b)  $\frac{5}{72}$       c)  $\frac{1}{14}$   
 d)  $\frac{1}{32}$       e)  $\frac{3}{32}$

22. La figura  $ABCD$  es un cuadrado de lado "a". El vértice  $A$  se une con los puntos medios de los lados  $\overline{BC}$  y  $\overline{CD}$ ; luego se traza el segmento que une los puntos medios de  $\overline{AB}$  y  $\overline{AD}$ . Hallar el área de la región triangular  $ARQ$ .



- a)  $\frac{a^2}{9}$       b)  $\frac{3a^2}{8}$       c)  $\frac{a^2}{24}$   
 d)  $\frac{a^2}{6}$       e)  $\frac{a^2}{12}$

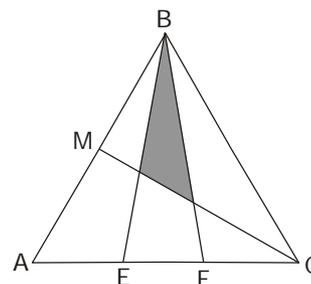
23. Se tiene un triángulo  $ABC$  inscrito en una circunferencia. La tangente en  $A$ , a la circunferencia, corta en  $P$  a la prolongación de  $\overline{CB}$ ; si:  
 $3AC \cdot CP = AB \cdot AP$  y el área de la región triangular  $APC$  es "k" unidades cuadradas. Hallar el área de la región triangular  $APB$ .

- a)  $\frac{k}{3} u^2$       b)  $\frac{2k}{5} u^2$       c)  $\frac{k}{7} u^2$   
 d)  $\frac{k}{5} u^2$       e)  $\frac{3}{4} k u^2$

24. Dos circunferencias se encuentran separadas y la distancia entre sus centros,  $A$  y  $B$  es 8 cm, siendo sus diámetros de 4 y 10 cm, respectivamente. De  $A$ , se traza una secante que corta en  $R$  y  $S$  a la otra circunferencia, donde  $RS = 6$  cm. Si  $P$  es la proyección de  $R$  sobre  $\overline{AB}$ , calcular el área de la región triangular  $RPB$ .

- a)  $(18 + 4\sqrt{3}) \text{ cm}^2$     b)  $(\frac{24+7\sqrt{3}}{8}) \text{ cm}^2$   
 c)  $(\frac{12+7\sqrt{3}}{8}) \text{ cm}^2$     d)  $(\frac{20+5\sqrt{3}}{4}) \text{ cm}^2$   
 e)  $(\frac{28+4\sqrt{3}}{4}) \text{ cm}^2$

25. El área de la región del triángulo  $ABC$  es "S". Si:  $AM = MB$  y  $AE = EF = FC$ , hallar el área de la región sombreada.



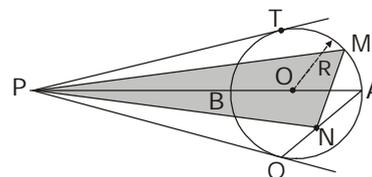
- a)  $\frac{S}{20}$       b)  $\frac{3}{20} S$       c)  $\frac{S}{10}$   
 d)  $\frac{S}{8}$       e)  $\frac{7S}{20}$

26. Dado un cuadrado  $ABCD$  sobre los lados  $\overline{BC}$  y  $\overline{CD}$  se toman los puntos  $M$  y  $N$  respectivamente tal que:  $m \angle MAN = 45^\circ$ ;  $\overline{BD}$  interseca a  $\overline{AM}$  y  $\overline{AN}$  en los puntos  $P$  y  $Q$  respectivamente.

Si:  $\{\overline{PN}\} \cap \{\overline{MQ}\} = F$ ; si la prolongación de  $\overline{AF}$  corta a  $\overline{MN}$  en "k", tal que:  $AF = 10$  y  $FK = 2$ . Hallar el área de la región triangular  $MCN$ .

- a) 12      b) 24      c) 20  
 d) 40      e) 42

27. Del gráfico :  
 $m \angle TPQ = 60^\circ$ ,  $m\widehat{TM} = m\widehat{AM}$ ,  $AN = NQ$ . Calcular el área de la región sombreada en función de  $R$ .



- a)  $\frac{7}{8} \sqrt{3} R^2$     b)  $\sqrt{3} R^2$       c)  $\sqrt{5} R^2$   
 d)  $\frac{7}{3} \sqrt{5} R^2$     e)  $\frac{18\sqrt{7}}{5} R^2$

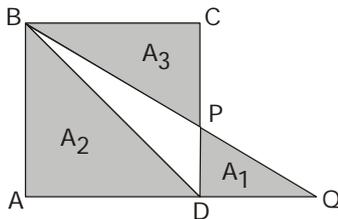
28. En un triángulo ABC, se trazan  $\overline{BP}$  y  $\overline{BQ}$  perpendiculares a las bisectrices exteriores de los ángulos A y C respectivamente. Luego, se traza  $\overline{IM}$  perpendicular a  $\overline{AC}$  (I: incentro del triángulo ABC). Calcular el área de la región triangular ABC, si el área de la región PIQM  $64 u^2$ .

- a)  $64 u^2$       b)  $32 u^2$       c)  $16 u^2$   
 d)  $128 u^2$     e)  $24 u^2$

29. Graficar el cuadrilátero ABCD y ubicar M y N puntos medios de  $\overline{BD}$  y  $\overline{AC}$  respectivamente. En MN, ubicar el punto P. Si las áreas de las regiones triangulares DAP, APB, CPD y CPB son  $S_1, S_2, S_3$  y  $S_4$  respectivamente, hallar la relación que cumplen  $S_1, S_2, S_3$  y  $S_4$ .

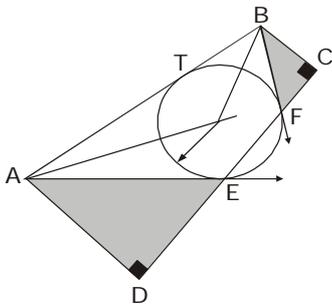
- a)  $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$     b)  $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$   
 c)  $S_2 \cdot S_3 = S_3 \cdot S_4$     d)  $S_2 + S_3 = S_1 + S_4$   
 e)  $\frac{S_1}{S_2} = \frac{S_3}{S_4}$

30. La figura muestra al cuadrado ABCD donde  $PC \cong DQ$ . Indicar la relación correcta entre las áreas de las regiones sombreadas.



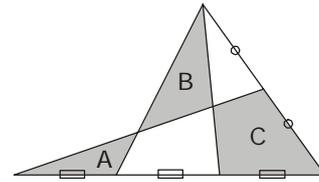
- a)  $A_3 = A_2 - A_1$       b)  $A_3 = \frac{A_2 - A_1}{2}$   
 c)  $A_3^2 = A_2^2 - A_1^2$     d)  $A_3 = \frac{A_2 + A_1}{2}$   
 e)  $(A_3)^2 = (A_2)(A_1)$

31. En la figura:  $5BT = 3AT$ . Calcular la razón de las áreas de las regiones triangulares BCF y ADE. (T, E y F → puntos de tangencia).



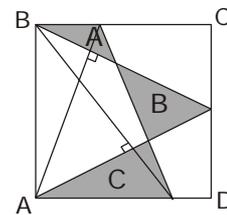
- a)  $3/5$       b)  $1/3$       c)  $1/2$   
 d)  $9/25$     e)  $5/8$

32. En la figura, A, B y C representan las áreas de las regiones sombreadas. Determinar la relación correcta entre dichas regiones.



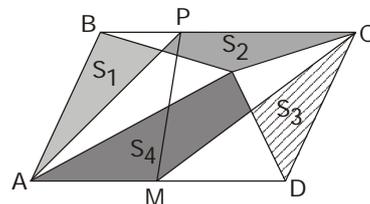
- a)  $B = \sqrt{AC}$     b)  $C = A + B$     c)  $C = \sqrt{AB}$   
 d)  $B = 4ABC$     e)  $A = 2C - B$

33. Si ABCD es un cuadrado, encontrar la relación entre A, B y C.



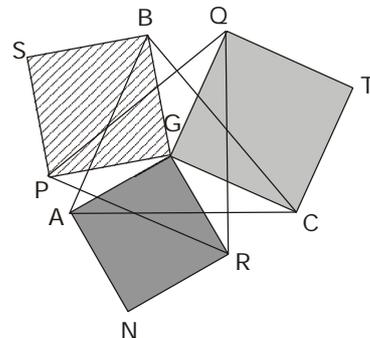
- a)  $A + B = C$     b)  $B + C = A$     c)  $B + C = 2A$   
 d)  $A + C = B$     e)  $A + C = 2B$

34. Si ABCD es romboide, hallar la relación de las áreas:  $S_1, S_2, S_3$  y  $S_4$ ; si:  $\overline{MP} \parallel \overline{AB}$ .



- a)  $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$     b)  $S_1 + S_4 = S_2 + S_3$   
 c)  $S_1 + S_3 = S_2 + S_4$     d)  $S_1 \cdot S_2 = S_3 \cdot S_4$   
 e)  $S_1 \cdot S_3 = S_2 \cdot S_4$

35. Si "G" es el baricentro del triángulo ABC y además  $(PQ)^2 + (PR)^2 + (QR)^2 = 3$ , hallar la suma de las áreas de las regiones de los cuadrados mostrados.

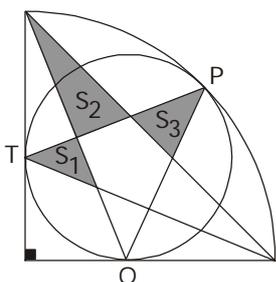


- a) 1      b) 2      c) 3  
 d) 4      e) 5

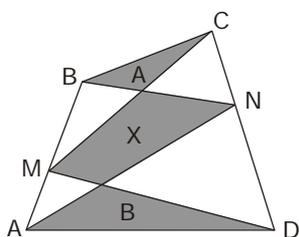
36. Exteriormente a una recta, se marca el punto "O" y se traza los rayos  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$  y  $\vec{OD}$  (A, B, C, D están sobre la recta y forman una cuaterna armónica) sobre  $\vec{OA}$  y  $\vec{OC}$  se toman los puntos E y F.  
Si:  $\{\overline{EF}\} \cap \{\overline{OB}\} = M$  y  $\overline{EF} \parallel \overline{OD}$ . Hallar:

$$\frac{\text{Área del triángulo EOM}}{\text{Área del triángulo FOM}}$$

- a) 1                      b) 1/2                      c) 1/3  
d) 1/4                      e) 1/5
37. Si T, P y Q son puntos de tangencia, hallar la relación entre  $S_1$ ,  $S_2$  y  $S_3$ .



- a)  $S_2 = S_1 + S_3$       b)  $3S_3 = 2(S_1 + S_2)$   
c)  $2S_2 = 3S_1 - S_2$       d)  $3S_1 = S_2 + S_3$   
e)  $2S_1 = S_2 + S_3$
38. Si:  $(AM) \cdot (ND) = (BM) \cdot (CN)$ ; hallar "X" en función de A y B.



- a)  $A + 2B$               b)  $2A + B$               c)  $2(A + B)$   
d)  $A + B$               e)  $3(A + B)/2$
39. En un triángulo ABC, el segmento que une el incentro y el baricentro es paralelo a la base  $\overline{AC}$  y el inradio mide 2. Calcular el área de la región triangular ABC, si:  $AC = 8$ .
- a) 21                      b) 24                      c) 18  
d) 16                      e) 12
40. Los lados de un triángulo miden  $15u$ ,  $20u$  y  $25u$ . Calcular el área de la región triangular formada por el incentro, baricentro y circuncentro del triángulo.
- a) 5                      b) 2,5                      c) 5/3  
d) 10/3                      e) 25/12

41. Calcular el área de la región triangular correspondiente a un triángulo isósceles, en el cual la base mide 16 cm y el circunradio 10 cm, siendo el triángulo obtusángulo.

- a)  $32 \text{ cm}^2$               b)  $16 \text{ cm}^2$               c)  $48 \text{ cm}^2$   
d)  $30 \text{ cm}^2$               e)  $34 \text{ cm}^2$

42. Hallar el área de la región del hexágono regular circunscrito a una circunferencia, sabiendo que el área de la región del hexágono regular inscrito en la misma circunferencia es 540.

- a) 840                      b) 720                      c) 650  
d) 600                      e) 540

43. Se tiene un hexágono regular de 4m de lado, se construyen circunferencias de 2m de radio, tangentes exteriores a cada lado en su punto medio. ¿Cuál es el área de la región del hexágono obtenido al unir los centros de la circunferencia?

- a)  $9 + 6\sqrt{3}$               b)  $18 + 2\sqrt{3}$   
c)  $36 + 24\sqrt{3}$               d)  $27 + 18\sqrt{3}$   
e)  $45 + 30\sqrt{3}$

44. En un triángulo ABC, los lados  $\overline{AB}$ ,  $\overline{BC}$  y  $\overline{AC}$ , miden  $13u$ ,  $14u$  y  $15u$ , respectivamente. Se trazan las alturas  $\overline{AD}$  y  $\overline{CE}$ , hallar el área de la región cuadrangular EBDO, siendo "O" el circuncentro del triángulo ABC.

- a)  $\frac{375}{4}$                       b)  $\frac{375}{8}$                       c)  $\frac{375}{16}$   
d)  $\frac{375}{32}$                       e) 21

45. Las diagonales de un rombo son proporcionales a 2 y 3, respectivamente. Calcular la diagonal menor, si el área de la región romboidal es  $48 \text{ m}^2$ .

- a) 12 m                      b) 8 m                      c) 10 m  
d) 6 m                      e) 9 m

46. Calcular el área de la región que encierra un hexágono regular inscrito en una circunferencia de 4 cm de radio.

- a)  $18\sqrt{3} \text{ cm}^2$       b)  $24\sqrt{2} \text{ cm}^2$       c)  $20 \text{ cm}^2$   
d)  $24\sqrt{3} \text{ cm}^2$       e)  $16\sqrt{7} \text{ cm}^2$

47. Se tiene un rectángulo de  $60 \text{ cm}^2$  de área. Si los lados son números enteros en (cm), el perímetro mínimo posible en cm, es :

- a) 38 cm                      b) 30 cm                      c) 34 cm  
d) 32 cm                      e) 36 cm

48. En un cuadrado ABCD, se traza interiormente la semicircunferencia de diámetro  $\overline{AD}$ , luego, se traza la tangente  $\overline{CP}$  a dicha semicircunferencia (P es punto de tangencia).  
Hallar el área de la región cuadrangular ACBP.  
Si :  $AD = 10$ .

- a) 50                      b) 45                      c) 35  
d) 40                      e) 30

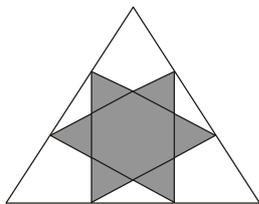
49. En un rombo ABCD, las proyecciones de las diagonales  $\overline{BD}$  y  $\overline{AC}$  sobre  $\overline{AD}$ , tiene como longitudes "m" y "k", respectivamente. Hallar el área de la región limitada por el rombo.

- a)  $\left(\frac{K-m}{2}\right)\sqrt{Km}$   
b)  $\left(\frac{K+m}{2}\right)\sqrt{Km}$   
c)  $\left(\frac{K+m}{3}\right)\sqrt{Km}$   
d)  $\left(\frac{K+m}{2}\right)(Km)$   
e)  $(K+m)(Km)$

50. En un cuadrado ABCD por el vértice B se traza la recta  $L_1$ , no secante al cuadrado y por el vértice D, se traza la recta  $L_2$  que interseca al lado  $\overline{AB}$  en Q, de modo que :  
 $\overleftrightarrow{L_1}$  y  $\overleftrightarrow{L_2}$  se intersecan perpendicularmente en P,  $PB = b$  y la distancia del vértice A a la recta  $L_2$  es "a".  
Hallar el área de la región cuadrada ABCD.

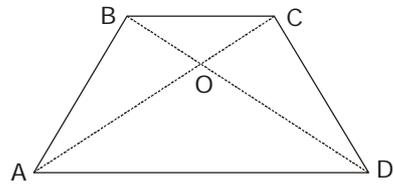
- a)  $2b^2 + 2ab + a^2$     b)  $2a^2 + 2ab + b^2$   
c)  $(2a + b)^2$         d)  $(a + 2b)^2$   
e)  $(a + b)^2$

51. Dado un triángulo equilátero de 3m de lado, se dividen en tres segmentos iguales a los lados del triángulo y se unen los puntos de división formándose una estrella, como se muestra en la figura.  
Calcular el área de la estrella.



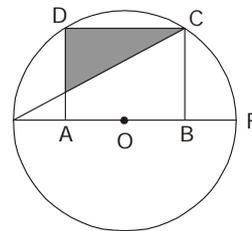
- a)  $\frac{5}{4}\sqrt{3} m^2$     b)  $(1 + \sqrt{3}) m^2$     c)  $(\sqrt{3} - 1) m^2$   
d)  $\sqrt{3} m^2$         e)  $\frac{7}{4}\sqrt{3} m^2$

52. En el trapecio ABCD, las diagonales determinan los triángulos AOD y BOC, de áreas  $49 m^2$  y  $25 m^2$ , respectivamente. Hallar el área del trapecio.



- a)  $135 m^2$     b)  $140 m^2$     c)  $144 m^2$   
d)  $148 m^2$     e)  $180 m^2$

53. Hallar el área de la región sombreada, si el radio de la circunferencia es 6, el segmento  $BF = 2$  y ABCD es un rectángulo.

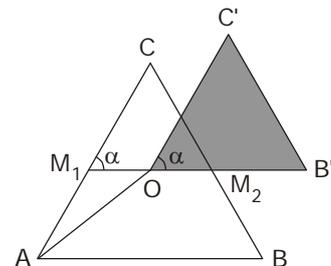


- a)  $12,1 m^2$     b)  $12,3 m^2$     c)  $15,6 m^2$   
d)  $16,4 m^2$     e)  $14,3 m^2$

54. En una circunferencia de radio "r", se desea inscribir un rectángulo, tal que este rectángulo circunscriba a otra circunferencia. Hallar el área de la región del rectángulo.

- a)  $2r^2$                       b)  $r^2$                       c)  $3r^2$   
d)  $\frac{3r^2}{2}$                       e)  $\frac{r^2}{2}$

55. Hallar el área de la región triangular  $OB'C'$ , si :  
 $AB = 4 = BC$ ,  $M_1O = \frac{1}{4} AB$ ,  $AC = 6$ .  
 $M_1$  y  $M_2$  son puntos medios de  $\overline{AC}$  y  $\overline{BC}$ , respectivamente.  
 $\overline{AC} \parallel \overline{OC'}$  y  $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$ ;  $\overline{AO} = \overline{OC'}$ .



- a)  $(29/3)\sqrt{7}$     b)  $(29/6)\sqrt{7}$   
c)  $(29/7)\sqrt{7}$     d)  $(29/2)\sqrt{7}$   
e)  $(29/24)\sqrt{7}$

56. Sobre una recta se toman tres puntos : A, B, C (en ese orden), tales que :  
 $AB = a$ ,  $BC = b$ . Con dos puntos D y E exteriores a la recta y a un mismo lado, con respecto a ella se construyen dos triángulos ABD y BCE.  
 Hallar el área cuadrangular ADEC.

- a)  $\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 + b^2 + ab)$
- b)  $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 + ab)$
- c)  $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2)$
- d)  $\frac{\sqrt{3}}{3}(a^2 - b^2 - ab)$
- e)  $\frac{\sqrt{3}}{2}(a^2 - b^2 + ab)$

57. El ancho de una finca rectangular es  $\frac{1}{4}$  del largo. Si se prolongase ésta 5 m y aquélla 3 m, la finca tendría un aumento de  $185 \text{ m}^2$ .  
 ¿Qué dimensiones tiene dicha finca?

- a) 10 m y 40 m.      b) 20 m y 80 m.
- c) 15 m y 60 m.      d) 10 m y 45 m.
- e) 10 m y 80 m.

58. Sean dos circunferencias tangentes exteriormente de radios 10 dm y 30 dm.  
 Determinar el área del triángulo isósceles circunscrito a las dos circunferencias.

- a)  $1800\sqrt{3} \text{ dm}^2$       b)  $1200\sqrt{3} \text{ dm}^2$
- c)  $900\sqrt{3} \text{ dm}^2$       d)  $180\sqrt{3} \text{ dm}^2$
- e)  $2700\sqrt{3} \text{ dm}^2$

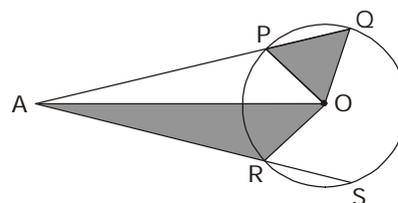
59. Sea A el área de un triángulo  $\Delta$ ,  $A_1$  el área del triángulo  $\Delta_1$  obtenido uniendo los puntos medios de los lados del triángulo  $\Delta$ ; análogamente sea  $A_2$  el área del triángulo  $\Delta_2$ , obtenido uniendo los puntos medios de los lados del triángulo  $\Delta_1$ ; y así sucesivamente.

Entonces, la suma de las áreas :  
 $A + A_1 + A_2 + \dots$ , es:

- a)  $\frac{3}{4}A$       b)  $\frac{4}{3}A$       c) A
- d)  $\frac{3}{2}A$       e) 2A

60. Se tiene un círculo de centro "O" y un punto "A" externo a él (ver figura).

Sean :  $PQ = RS = 16 \text{ m}$ ; el área de la región triangular  $OPQ = 48 \text{ m}^2$  y  $OA = \sqrt{157} \text{ m}$ .  
 Calcular el área de la región del triángulo AOR.



- a)  $48 \text{ m}^2$       b)  $36 \text{ m}^2$       c)  $24 \text{ m}^2$
- d)  $9 \text{ m}^2$       e)  $12 \text{ m}^2$

# Claves

21.	<i>d</i>
22.	<i>c</i>
23.	<i>a</i>
24.	<i>b</i>
25.	<i>b</i>
26.	<i>b</i>
27.	<i>a</i>
28.	<i>d</i>
29.	<i>d</i>
30.	<i>d</i>
31.	<i>d</i>
32.	<i>b</i>
33.	<i>d</i>
34.	<i>c</i>
35.	<i>a</i>
36.	<i>a</i>
37.	<i>a</i>
38.	<i>d</i>
39.	<i>b</i>
40.	<i>e</i>

41.	<i>a</i>
42.	<i>b</i>
43.	<i>c</i>
44.	<i>c</i>
45.	<i>b</i>
46.	<i>d</i>
47.	<i>d</i>
48.	<i>d</i>
49.	<i>b</i>
50.	<i>b</i>
51.	<i>d</i>
52.	<i>c</i>
53.	<i>e</i>
54.	<i>a</i>
55.	<i>e</i>
56.	<i>b</i>
57.	<i>a</i>
58.	<i>e</i>
59.	<i>b</i>
60.	<i>d</i>