Capítulo 9

NÚMEROS COMPLEJOS

Cantidades Imaginarias

Se obtienen al extraer raíz de índice par a un número negativo.

Ejemplo : $\sqrt{-2}$; $\sqrt[4]{-7}$; $\sqrt[6]{-4}$; ... etc.

Unidad Imaginaria

Definición

La unidad imaginaria se obtiene al extraer raíz cuadrada de -1, se representa de la siguiente manera :

$$\boxed{\sqrt{-1} = i}$$

también se define como :

$$\boxed{i^2 = -1}$$

Potencias de la Unidad Imaginaria

$$\boxed{\begin{array}{l} i^1 = i \\ i^2 = -1 \\ i^3 = -i \\ i^4 = 1 \end{array}}$$

Propiedades :

1. $\boxed{i^{4n} = 1 ; n \,\varepsilon\, Z}$

   Ejemplo : $i^{480} = i^{4(120)} = 1$

2. $\boxed{i^{4n+k} = i^k ; (n ; k \,\varepsilon\, Z)}$

   Ejemplo : $i^{47} = i^{4(11)+3} = i^3 = -i$

   $i^{-10} = i^{-3(4)+2} = i^2 = -1$

Observación : Es conveniente recordar las siguientes propiedades aritméticas.

$$(a+r)^n = \overset{\circ}{a} + r^n$$

$$(a-r)^n = \overset{\circ}{a} + r^n \quad (n \to \text{par})$$

$$(a-r)^n = \overset{\circ}{a} - r^n \quad (n \to \text{impar})$$

Ejemplo :

$$i^{9^{10^{11^{12}}}} = i^{(\overset{\circ}{4}+1)^{10^{11^{12}}}} = i^{\overset{\circ}{4}+1^{10^{11^{12}}}} = i^{\overset{\circ}{4}+1} = i$$

Números Complejos

Son aquellos números que tienen la forma :

$$\boxed{Z = a + bi = (a ; b); a, b \,\varepsilon\, R}$$

donde : $\begin{cases} a = \text{Re}(Z) \text{ se llama, parte real de } Z \\ b = \text{Im}(Z) \text{ se llama parte imaginaria de } Z \end{cases}$

CLASIFICACIÓN DE LOS COMPLEJOS

Complejos Conjugados $(\overline{Z})$

Son aquellos que sólo difieren en el signo de la parte imaginaria.

Ejemplo :

$Z = 3 + 4i$; su conjugado es : $\overline{Z} = 3 - 4i$

Complejos Opuestos (Zop)

Son aquellos que sólo difieren en los signos de la parte real e imaginaria, respectivamente.

Ejemplo :

$Z = 5 - 2i$; su opuesto es : $Zop = -5 + 2i$

Complejos Iguales

Son aquellos que tienen partes reales e imaginarias, respectivamente, iguales.

Ejemplo :
De la igualdad : $a + bi = 8 - 11i$
tenemos : $a = 8; b = -11$

Complejo Nulo

Son aquellos que tienen su parte real e imaginaria, respectivamente, iguales a cero.

Si : $a + bi$ es nulo $\Rightarrow a + bi = 0$
Luego : $a = 0; b = 0$

Complejo Imaginario Puro

Es aquel cuya parte real es igual a cero y su parte imaginaria distinta de cero.

Si : $a + bi \to$ es imaginario puro $\Rightarrow a = 0$

Complejo Real

Si un complejo es real, entonces su parte imaginaria igual a cero :

Si : a + bi $\rightarrow$ es real $\Rightarrow$ b = 0

Representación de los Complejos

I. Representación Cartesiana o Geométrica

En este caso, el complejo está representado de la forma:

$$\boxed{Z = a + bi}$$

Gráfica del Complejo

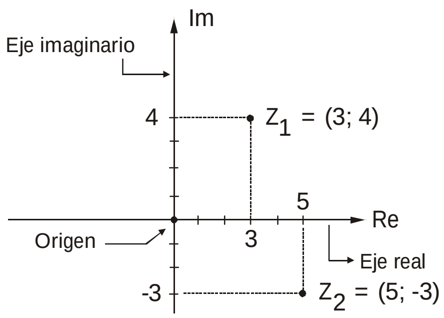
Cada complejo es un punto en el plano, para ubicarlo se le representa en el llamado plano complejo, Gaussiano o de Argand, el cual está formado por un eje vertical (eje imaginario) y un eje horizontal (eje real).

Ejemplo :

Graficar : $Z_1 = 3 + 4i$

$Z_2 = 5 - 3i$

En el plano Gaussiano :



Observación : Cada complejo se representa por un punto en el plano al cual se le llama afijo del complejo.

II. Representación Polar o Trigonométrica :

En este caso, el complejo adopta la forma :

$$\boxed{Z = \rho(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta)}$$

Donde : $\rho \rightarrow$ módulo; $\rho > 0$

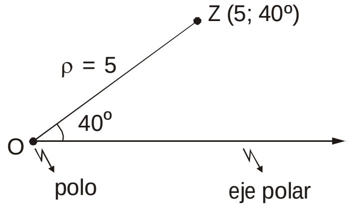
$\theta \rightarrow$ argumento; $0 \leq \theta < 2\pi$

Gráfica del Complejo

En este caso, se utiliza el sistema de coordenadas polares el cual está formado por un punto fijo llamado polo y una semirecta que parte del polo, llamado eje polar. El módulo (ρ) es la distancia del polo al punto que representa el complejo y el argumento (θ) el ángulo positivo medido en sentido antihorario desde el eje polar hasta el radio vector $\overrightarrow{OZ}$.

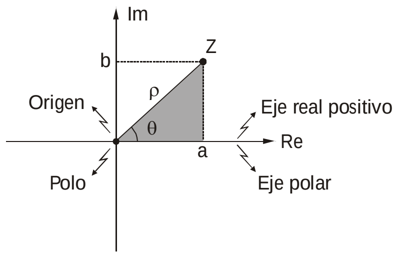
Graficar : Z = 5(Cos40° + iSen40°)

En el sistema de coordenadas polares :



Relación entre la Representación Cartesiana y Polar

Sea el complejo : Z = a+b i (a, b >0)



En la figura sombreada :

$$\begin{cases} * \ \rho = \sqrt{a^2 + b^2} \\ * \ a = \rho\,\text{Cos}\,\theta \\ * \ b = \rho\,\text{Sen}\,\theta \\ * \ \theta = \text{ArcTg}\,\dfrac{b}{a} \end{cases}$$

$$a + bi = \rho\,\text{Cos}\theta + (\rho\,\text{Sen}\theta)i$$

$$\boxed{a + bi = \rho(\text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta)}$$

Para transformar de cartesiana a polar se calcula ρ y θ. En el caso inverso, se calcula el valor de la función trigonométrica.

Aplicación :

1. Transformar : Z = 3 + 4i

   * $\rho = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$

   * $\theta = \text{ArcTg}\,\dfrac{4}{3} = 53°$

   $\Rightarrow 3 + 4i = 5(\text{Cos}53° + i\,\text{Sen}53°)$

2. Transformar : Z = 6 (Cos37° + i Sen37°)

   Z = 6(Cos37° + i Sen37°)

   $Z = 6(\dfrac{4}{5} + i\dfrac{3}{5})$

   $Z = \dfrac{24}{5} + \dfrac{18}{5}i$

III. Representación de Euler

En este caso, se tiene :

$$\rho(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta) = \rho e^{i\theta} \quad \text{expresado en radianes}$$

Se cumple :

$$\boxed{\text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta = e^{i\theta}}$$

Siendo : e = 2,71828 .... (base de los logaritmos naturales).

Asimismo :

$$\boxed{a + bi = \rho(\text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta) = \rho e^{i\theta}}$$

OPERACIONES CON COMPLEJOS

I. ***Operaciones en forma cartesiana***

a) ***Adición y multiplicación***
Se utilizan las mismas reglas algebraicas.

Ejemplo : $(3+i)(3+2i)$ - (5-4i)

Resolución :

$$9 + 6i + 3i + 2i^2 - 5 + 4i$$
$$= 9 + 6i + 3i - 2 - 5 + 4i$$
$$= 2 + 13i$$

b) ***División***
Se multiplica el numerador y denominador por el complejo conjugado de este último.

Ejemplo : $Z = \dfrac{2+3i}{3+i}$

$$Z = \frac{2+3i}{3+i}\cdot\frac{3-i}{3-i} = \frac{6-2i+9i-3i^2}{9-i^2}$$

$$Z = \frac{6+7i+3}{9-(-1)} = \frac{9+7i}{10} = \frac{9}{10} + \frac{7}{10}i$$

c) ***Potenciación*** :
Se utiliza el teorema del binomio.

Ejemplo:

$$(2i+3)^2 = 4i^2 + 12i + 9$$
$$= -4 + 12i + 9$$
$$= 5 + 12i$$

d) ***Radicación*** :
En general se asume que la raíz adopta la forma $(a+bi)$; luego a y b se hallan por definición de radicación.

Ejemplo : $\sqrt{5+12i}$

$$\sqrt{5+12i} = a + bi$$

Elevando al cuadrado

$$5 + 12i = a^2 - b^2 + 2abi$$

Igualando :

$$5 = a^2 - b^2 \,;\; 12 = 2ab$$

Resolviendo :

$$\left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{5+12i} = 3 + 2i$$

$$\left.\begin{array}{l} a = -3 \\ b = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow \sqrt{5+12i} = -3 - 2i$$

Observación :

* $(1 \pm i) = \pm 2i$

* $\dfrac{1+i}{1-i} = i$

* $\dfrac{1-i}{1+i} = -i$

Operaciones en forma polar

a) ***Multiplicación*** :
En este caso, los módulos se multiplican y los argumentos se suman.

$$Z_1 = \rho_1(\text{Cos}\,\theta_1 + i\,\text{Sen}\,\theta_1)$$
$$Z_2 = \rho_2(\text{Cos}\,\theta_2 + i\,\text{Sen}\,\theta_2)$$

$$\boxed{\Rightarrow Z_1 Z_2 = \rho_1\rho_2[\text{Cos}(\theta_1+\theta_2) + i\,\text{Sen}(\theta_1+\theta_2)]}$$

b) ***División*** :
En este caso, los módulos se dividen y los argumentos se restan.

$$Z_1 = \rho_1(\text{Cos}\;\theta_1 + i\,\text{Sen}\,\theta_1)$$
$$Z_2 = \rho_2(\text{Cos}\;\theta_2 + i\,\text{Sen}\theta_2)$$

$$\boxed{\Rightarrow \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2}[\text{Cos}(\theta_1-\theta_2) + i\,\text{Sen}(\theta_1-\theta_2)]}$$

c) ***Potenciación*** :
En este caso, el exponente eleva al módulo y multiplica al argumento.

$$[\rho(\text{Cos}\theta + i\,\text{Sen}\theta)]^n = \rho^n[\text{Cos}\,n\theta + i\,\text{Sen}\,n\theta]$$

d) ***Radicación*** :
En este caso, se aplica la fórmula de De Moivre.

Sea : $Z = \rho(\text{Cos}\theta + i\text{Sen}\theta)$

$$\boxed{\sqrt[n]{Z} = \sqrt[n]{\rho}\left[\text{Cos}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right) + i\,\text{Sen}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right] \quad k = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)}$$

Nota : observa que $\sqrt[n]{z}$ tiene "n" valores.

Ejemplo :
Hallar las raíces cúbicas de la unidad.

$$\sqrt[3]{1} = \sqrt[3]{1 + 0i} = \sqrt[3]{\text{Cos}\,0° + i\,\text{Sen}0°}$$

$$\sqrt[3]{1} = \text{Cos}\left(\frac{0° + 2k\pi}{3}\right) + i\,\text{Sen}\left(0° + \frac{2k\pi}{3}\right)$$

$k = 0, 1, 2$

$k = 0 \rightarrow \sqrt[3]{1} = 1$

$k = 1 \rightarrow \sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = w$

$k = 2 \rightarrow \sqrt[3]{1} = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = w^2$

$\therefore$ Raíces cúbicas de la unidad :
$1;\ w;\ w^2$.

donde :

* $w^3 = 1$
* $1 + w + w^2 = 0$

EJERCICIOS PROPUESTOS

01. Calcular :

$$\sqrt{-2}\,\sqrt{-8}+\sqrt{-12}\,\sqrt{-12}-\sqrt{-3600}\,\sqrt{-1}$$

a) 76 b) -76 c) 44
d) -44 e) 50

02. Reducir :

$$V=\frac{i^4+i^9+i^{16}}{2-i^5+i^{10}-i^{15}}-i$$

$(i=\sqrt{-1})$

a) 1 b) 2 c) 3i
d) 2i e) 4i

03. Simplificar :

$$Z=\frac{i^{28}+i^{321}+i^{49}+i^{50}+i^{17}}{i^{1921}+i^{1932}-i^{1960}+i^{1973}-i^{2003}}$$

$(i=\sqrt{-1})$

a) i b) -i c) 1
d) -1 e) 1 - 1

04. Reducir :

$$J=i+i^2+i^3+i^4+...+i^{2003}$$

$(i=\sqrt{-1})$

a) 1 b) 2 c) -1
d) i e) 2i

05. Hallar la suma "A" de números complejos :

$$A=(1+i)+(2+i^2)+(3+i^3)+(4+i^4)+...+(4n+i^{4n})$$

a) n (2n+1) b) 2n (4n+1)
c) 0 d) n(4n+1)
e) 2n(4n-1)

06. Calcular :

$$V=i^{9^{10^{11^{12}}}}+i^{13^{14^{15^{16}}}}+i^{17^{18^{19^{20}}}}$$

$(i=\sqrt{-1})$

a) 0 b) 1 c) 3
d) 3i e) -3i

07. Si : $(ni^{12}+i^{13})(2i+n)=a^2+bi;\{a;b;n\}\subset R$

Calcular : $\frac{b}{n}(n^2-a^2);(i=\sqrt{-1})$

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{3}{2}$ c) 6

d) $\frac{1}{3}$ e) 3

08. Si : $\sqrt{a^2+bi}=m+ni$

$\{a; b; m; n\}\subset R$; además : $i^2=-1$

Calcular : $\frac{m^2}{a^2+n^2}+\frac{b}{mn}$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

09. Calcular "n", si se cumple :

$$3(n+i)+5(n+3i)=3\sqrt{7}\,(a+2ai)$$

Si : $n\varepsilon R\wedge a\varepsilon R$.

a) $-\frac{3}{8}$ b) $\frac{9}{8}$ c) 9

d) $\frac{9}{4}$ e) $\frac{3}{4}$

10. Si : $n\varepsilon R\wedge z=\frac{3(n+i)+5(n+3i)}{1+2i}$

es un complejo real. Calcular : "n".

a) -3/8 b) 9/8 c) 9
d) 9/4 e) 3/4

11. Hallar "n", si el número siguiente es imaginario puro :

$$\frac{3-2ni}{4-3i}$$

a) -1 b) -2 c) -3
d) -4 e) -5

12. Sabiendo que :

$z=\frac{a+2i}{b-3i}$; es un número real.

$w=\frac{b+(a+8)i}{a+bi}$; es un número imaginario puro.

Indique : a - b.

a) -12 b) 10 c) 24
d) 8 e) -10

13. Si : $\{z_1 ; z_2\} \subset C$, calcular :

$$Im(\frac{5z_1+z_2}{3z_1+4z_2})-Im(\frac{2z_1-3z_2}{3z_1+4z_2})$$

a) -3 b) -1 c) 1
d) 3 e) 0

14. Si "i" es la unidad imaginaria, al efectuar la siguiente operación :

$$2(1+i)^{16}-(1-i)^{16}$$

a) 0 b) 1 c) -256
d) 512 i e) 256

15. Calcular el valor de : $\sqrt{2i}$.

a) 1 + i b) 1 - i c) -1 - i
d) -1 + i e) a ó c

16. Determinar el módulo de :

$$Z=\frac{(7+3i)(\sqrt{5}-3i)}{(-5+2i)(\sqrt{6}-i)}$$

a) 1 b) 2 c) $\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{7}$ e) 14

17. Sea : $Z_1=2+5i \wedge Z_2=1-i$

Determinar : $58\left(\frac{Z_2}{|Z_1|^2}\right)$

a) 3 + i b) 5 - i c) 4
d) 2 - 2i e) 4i

18. Determinar el módulo de :

$$Z=((1+i)^4+4i)((1-i)^4-4i)(\sqrt{3}i+1)$$

a) 2 b) 8 c) 32
d) 64 e) 128

19. Hallar "n".

$$8+(1-i)^6=n(1+i); n\,\varepsilon\,R ; i=\sqrt{-1}$$

a) 2 b) 4 c) 6
d) 8 e)10

20. Hallar el módulo del complejo "Z", si al dividirlo entre $5+i$ y al cociente sumarle 2, se obtuvo 3-i.

a) $\sqrt{13}$ b) $2\sqrt{13}$ c) $3\sqrt{13}$
d) $4\sqrt{13}$ e) $5\sqrt{13}$

21. Sean : $Z_1 ; Z_2\, \varepsilon\, C$. Reducir :

$$\frac{|z_1+z_2|^2-|z_1-z_2|^2}{Re(\overline{z}_1 . z_2)+Re(z_1 . \overline{z}_2)}$$

a) 1 b) 1/2 c) 2
d) 3 e) 1/3

22. Indique la parte real de :

$z=(1+i)^2+(1+2i)^2+(1+3i)^2+...+(1+ni)^2$;

$n\,\varepsilon\, Z^+$.

a) $\frac{n(n+1)}{2}$ b) n c) $\frac{n(2n+5)}{3}$
d) $\frac{n(n+1)}{6}$ e) $\frac{n}{6}(2n+5)(1-n)$

23. Si : $z\,\varepsilon\, C$, resolver :

$$|z| - z = 3 + i$$

Indique : z^{-1}.

a) $2(7+12i)^{-1}$ b) $6(7-24i)^{-1}$
c) $7(6-4i)^{-1}$ d) $-3(4+3i)^{-1}$
e) $7(6-28i)^{-1}$

24. Sean : $|z| = 2$; $|w| = 3$.

Hallar : $K=|z+w|^2+|z-w|^2$

a) 36 b) 26 c) 34
d) 18 e) 22

25. Indique el módulo de :

$$W=\sqrt{\frac{(2+2i)(1+3i)}{(1-i)(\sqrt{7}+\sqrt{3}i)}}$$

a) 1 b) $2\sqrt{3}$ c) $\sqrt{2}$
d) $2\sqrt{2}$ e) 2

26. Sabiendo que : m, n, x, y ε R.

Además : $\sqrt{m+ni}=x+yi$

Hallar el equivalente de :

$$K=\frac{n^2}{my^2+y^4}$$

a) 6 b) 4 c) 8
d) 12 e) 10

27. Si : $\sqrt[3]{a+bi}=m+ni$; $\{a;b;m;n\}\subset R$

además : $i=\sqrt{-1}$.
Calcular :

$$\sqrt{\frac{(m^3-a)(b+n^3)}{m^3n^3}}$$

a) 3 i b) 1 c) -3
d) -3 i e) 3

28. Resolver en :

$$C: z^2+2|z|=0$$

$z\neq(0,0)$. Indique : Re(3z) - Im(z).

a) -3 b) 9 c) 1
d) -2 e) 2

29. Efectuar :

$$\sqrt{2\sqrt{i-\sqrt{i+\sqrt[5]{i}}}}$$

a) 1 + i b) 1 - i c) i
d) $\sqrt{2}\,i$ e) $\frac{-1+i}{2}$

30. Hallar "Z", si cumple :

$$\frac{1}{Z}+\frac{1}{\overline{\overline{Z}}}=\frac{6}{25}\quad\wedge\quad |Z|=5$$

a) 3 - 4i b) 4 - 3i c) $\frac{5}{3+4i}$
d) $\frac{5}{3-4i}$ e) $\frac{5}{\sqrt{3}}+i$

31. Llevar a su forma trigonométrica :
z = -3 - 4i

a) $\sqrt{5}\,\text{Cis}\,233°$
b) 5 Cis 233°
c) $2\sqrt{2}$ Cis 135°
d) $\sqrt{2}$ Cis 135°
e) 5 Cis 135°

32. Llevar a su forma exponencial :

$$-4+4\sqrt{3}\,i$$

a) $16e^{\frac{4\pi}{3}i}$ b) $4e^{\frac{2\pi}{3}i}$ c) $4e^{\frac{4\pi}{3}i}$
d) $8e^{\frac{4\pi}{3}i}$ e) $8e^{\frac{2\pi}{3}i}$

33. Efectuar :

$$K=\frac{z_1^5\,z_2^3}{z_3^4}$$

sabiendo que :

$z_1=\sqrt{2}\,(\text{Cos}10°+i\,\text{Sen}10°)$

$z_2=\sqrt{8}\,\text{Cis}20°$

$z_3=4\text{Cos}5°+4i\text{Sen}5°$

a) 4 i b) -1/2 c) 1/4
d) i/2 e) 1

34. Sea : $w_1=-\text{Sen}20°-i\,\text{Cos}20°$, hallar :
$\text{Arg}(w_1)$.

a) 190° b) 250° c) 240°
d) 340° e) 200°

35. Efectuar :

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^{-4i}$$

a) $e^{-\pi}$ b) $e^{-\pi/2}$ c) $e^{\pi/2}$
d) $e^{2\pi}$ e) e^{π}

36. Un número real "x", que satisface la ecuación :
$(\text{Senx}+i\text{Cosx})^4=\text{Senx}-i\text{Cosx}$ es :

a) $\frac{\pi}{10}$ b) $-\pi$ c) $\frac{\pi}{2}$
d) $\frac{\pi}{5}$ e) π

37. Si : $z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$

Calcular : $z^{-3}+z^3$.

a) $2e^{\pi i}$ b) $2e^{2\pi i}$ c) $\sqrt{2}\,e^{2\pi i}$
d) $-1+\sqrt{3}\,i$ e) $e^{\frac{2\pi}{3}i}$

38. Reducir :

$$L=\frac{e^{\frac{\pi}{4}i}+e^{-\frac{\pi}{4}i}}{e^{\frac{\pi}{4}i}-e^{-\frac{\pi}{4}i}}$$

a) 1 b) -1 c) i
d) -i e) e

39. Proporcionar un equivalente de : i^i .

a) $e^{-\pi/4}$ b) $e^{-\pi/2}$ c) e^{π}
d) $e^{3\pi/2}$ e) Hay 2 correctas

40. Hallar el módulo de "z" que verifica :

$$e^z = \sqrt[4]{\frac{e^{\pi}}{4}}(1+i)$$

a) $\frac{\sqrt{2}\pi}{4}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\frac{\pi}{4}$
d) $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\pi}{2}$

41. Haciendo :

$$w_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2};\ w_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Determinar : $w_1^{\,n} + w_2^{\,n}$; $n \varepsilon Z$; n = par.

a) $2Cos\frac{n\pi}{3}$ b) $2Cos\frac{2n\pi}{3}$
c) $2Sen\frac{2n\pi}{3}$ d) $2Sen\frac{n\pi}{3}$
e) $2Cos\frac{n\pi}{6}$

42. Si : "w" es raíz cúbica de la unidad real, calcular :
$Z = \{(1-w)(1-w^2)\}^{51}\{(1-w^4)(1-w^5)\}^{50}$

a) 3^{100} b) 0 c) 1
d) 2^{101} e) 3^{101}

43. Si : "w" es una de las raíces cúbicas de la unidad real, calcular :

$$E = (w+1)(w^2+1)(w^3+1)(w^4+1)...(w^{6n}+1)$$

a) 4^n b) 2^n c) 8^n
d) 3^n e) 16^n

44. Si : ε_1 , ε_2 , ε_3 , ε_4 son las cuatro raíces imaginarias de: $\sqrt[5]{1}$, calcular :

$$Im\,(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 + \varepsilon_4)$$

a) 1 b) 0 c) -1
d) Cos (7°) e) Sen (36°)

45. Una de las raíces "Doceavas" del complejo Cis 12°; presenta el mayor argumento, indíquelo :

a) 311° b) 321° c) 361°
d) 391° e) 331°

46. Si : ϕ_0 ; ϕ_1 ; ϕ_2 ; ϕ_3 ; ϕ_4 ; ϕ_5 ; son las raíces de 0rden 6 de la unidad. ¿Qué clase de número es :

$$\phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5\ ?$$

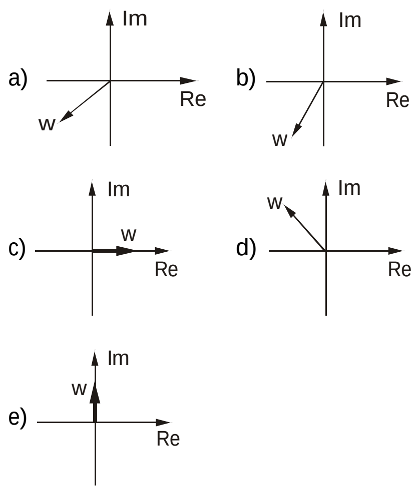
a) Nulo.
b) Real.
c) Imaginario puro.
d) Su módulo es 1.
e) Más de una es correcta.

47. Indique el argumento del complejo :

$$w = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2-3i}$$

a) π /6 b) π /2 c) 2 π /3
d) - π e) π /4

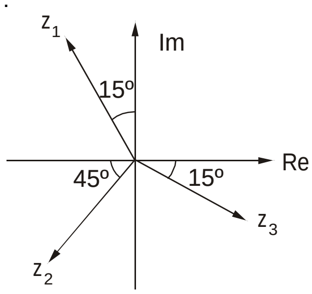
48. Del problema anterior, grafique el complejo:



49. Calcular "n" en : $(1-w)^{2n} = -2187w$
Siendo "w" una de las raíces cúbicas de la unidad.

a) 1 b) 4 c) 5
d) 7 e) 8

50. Dados los complejos : z_1; z_2; z_3 en el plano Gausseano :



Indique verdadero (V) o falso (F) :

I. $\text{Arg}(z_1 . z_2) = 340°$

II. $\text{Re}(z_1) + \text{Im}(z_2) > 0$

III. $\text{Arg}(z_3) - \text{Arg}(z_1) = 240°$

a) FVV b) FVF c) VVV
d) FFF e) FFV

51. Si : a, b y α , son números reales y :

$$\frac{a+bi}{a-bi} = e^{i\alpha}$$

entonces el valor de $\text{Tg}\,\alpha$ es :

a) $\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$ b) $\dfrac{ab}{a^2+b^2}$ c) $\dfrac{2ab}{a^2-b^2}$

d) $\dfrac{ab}{a^2-b^2}$ e) $\dfrac{a^2-b^2}{2ab}$

52. Hallar el módulo de :

$$z = 1 + \text{Cos}74° + i\,\text{Sen}74°$$

Sabiendo que : $1 + \text{Cos}\,2\alpha° = 2\text{Cos}^2\alpha$

a) 1,7 b) 1,5 c) 1,1
d) 1,6 e) 1,8

53. Hallar el módulo de :

$$z = \sqrt[2+i]{e^{2-i}}$$

a) $e\sqrt[3]{e}$ b) 1 c) $\sqrt[3]{e}$

d) $\sqrt[5]{e^3}$ e) $\sqrt[5]{e}$

54. Si : α y β, son las raíces cúbicas imaginarias de la unidad, el equivalente de :

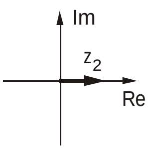
$$K = \alpha^4 + \beta^4 + (\alpha\beta)^{-1}$$

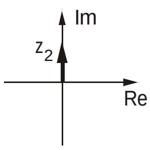
a) 1 b) 2 c) 0
d) 4 e) 6

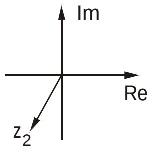
55. Dado el complejo : $z = e^{3+\alpha i}$, donde :

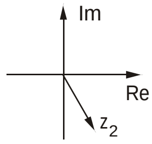
$\alpha\,\varepsilon < \dfrac{\pi}{2}; \dfrac{5\pi}{8} >$, indique el complejo :

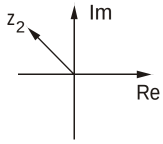
$z_2 = ze^{\beta i-3}$, donde : $\beta\,\varepsilon < \dfrac{\pi}{4}; \dfrac{3\pi}{8} >$.

a) 

b) 

c) 

d) 

e) 

56. Hallar el módulo de :

$$w = \sqrt{2}^{\,i-3}(1+i)^{3-i}$$

a) 1 b) $e^{\pi/4}$ c) $\sqrt{2}$
d) $5\pi/4$ e) $3\pi/4$

57. Si "w" es una de las raíces cúbicas imaginarias de la unidad, calcular :

$(1-w+w^2)(1-w^2+w^4)(1-w^4+w^8)$... 2n factores

a) 1 b) $(-1)^n$ c) 2^n

d) 2^{2n} e) 2^{2^n}

58. Resolver en C :

$$\text{Tg}\,z = \frac{3i}{5}$$

a) ln 5 b) ln 3 c) ln 2
d) i ln 3 e) i ln 2

59. Calcular el mínimo valor natural de "n" que verifica la igualdad :

$$\sqrt[n]{\frac{1-i}{1+i}} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}+1);\ i = \sqrt{-1}$$

si éste es de 4 cifras.

a) 1000 b) 1009 c) 1004
d) 1005 e) 1006

60. Reducir :

$$\sqrt{(a+bw)^2 + (b+aw)^2 + (a+bw^2)^2 + (b+aw^2)^2 + 2ab}$$

Si : b > a ; $w = \sqrt[3]{1}$.

a) a + b b) a - b c) b - a
d) 2b - a e) 2a - b

Claves

01.	c
02.	b
03.	c
04.	c
05.	b
06.	d
07.	c
08.	c
09.	b
10.	b
11.	b
12.	e
13.	e
14.	e
15.	e
16.	b
17.	d
18.	d
19.	d
20.	b
21.	c
22.	e
23.	d
24.	b
25.	c
26.	b
27.	e
28.	d
29.	a
30.	a

31.	b
32.	e
33.	d
34.	b
35.	e
36.	c
37.	b
38.	d
39.	e
40.	a
41.	a
42.	e
43.	a
44.	b
45.	e
46.	e
47.	c
48.	d
49.	d
50.	e
51.	c
52.	d
53.	a
54.	c
55.	e
56.	b
57.	d
58.	e
59.	d
60.	c