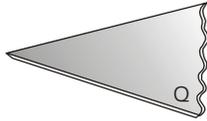
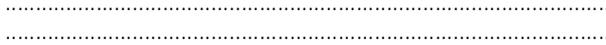


Capítulo
16

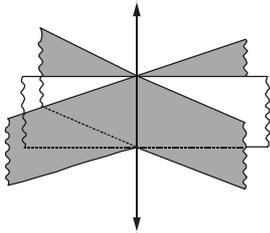
**GEOMETRÍA DEL ESPACIO
PERPENDICULAR - DIEDRO
- TRIEDRO**

GEOMETRÍA DEL ESPACIO - DIEDROS

PLANO :

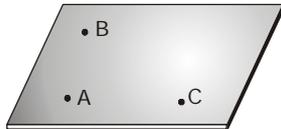


AXIOMA :

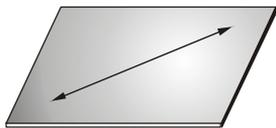


DETERMINACIÓN DEL PLANO :

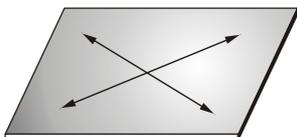
I.



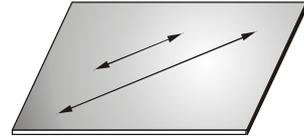
II.



III.



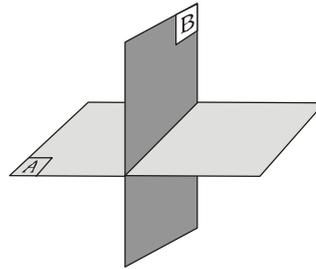
IV.



POSICIONES RELATIVAS DE DOS FIGURAS EN EL ESPACIO

I. **DOS PLANOS**

I.a.



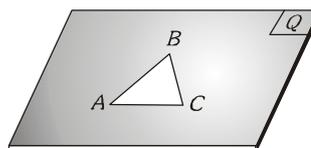
A y B secantes

I.b.



A y C paralelos

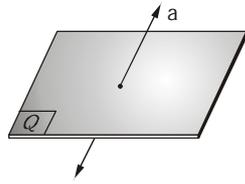
I.c.



Q y ABC son coincidentes

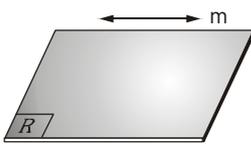
II. UN PLANO Y UNA RECTA

a)



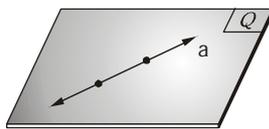
Q y \vec{a} son secantes

b)



\vec{m} y R son paralelos

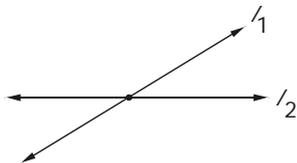
c)



\vec{a} está contenida en Q

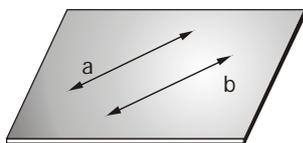
III. DOS RECTAS

a)



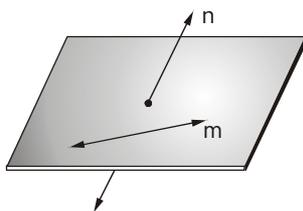
l_1 y l_2 son rectas secantes

b)



\vec{a} y \vec{b} son rectas paralelas

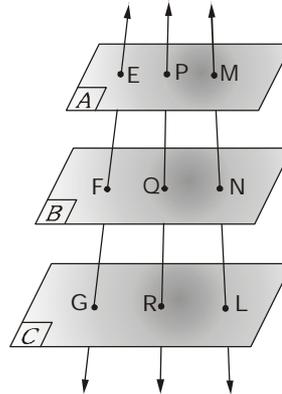
c)



\vec{m} y \vec{n} son rectas alabeadas

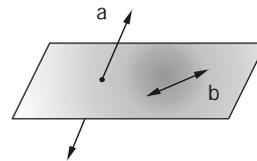
TEOREMA DE THALES

Si: $A \parallel B \parallel C$.



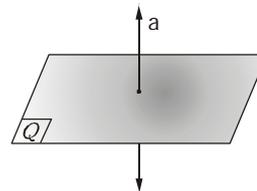
$$\rightarrow \frac{EF}{FG} = \frac{PQ}{QR} = \frac{MN}{NL} = k$$

ÁNGULO ENTRE RECTAS ALABEADAS

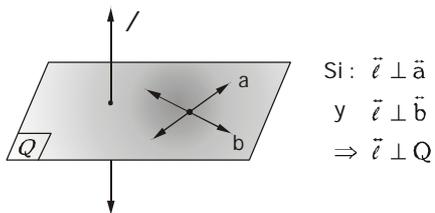


RECTA PERPENDICULAR A UN PLANO

Definición :

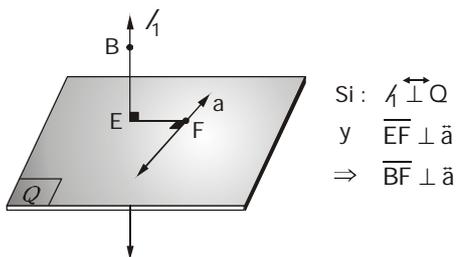


Condición :

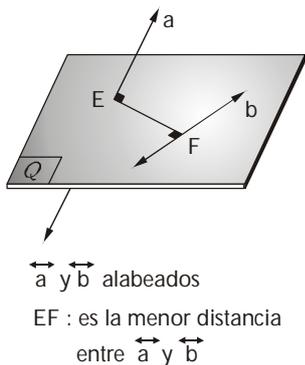


TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

.....

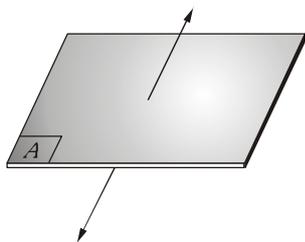


DISTANCIA ENTRE RECTAS ALABEADAS



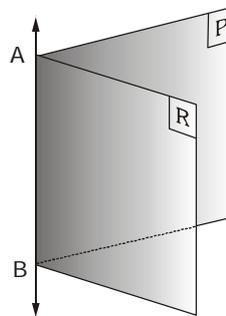
ÁNGULO ENTRE RECTA Y PLANO

.....



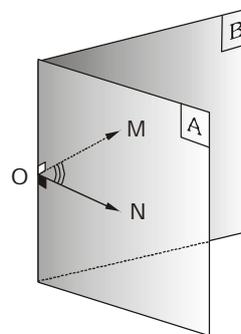
ÁNGULO DIEDRO

Definición :



Caras : P y R
 Arista : \vec{AB}
 Notación : Diedro \vec{AB}
 ó P - \vec{AB} - R

* Se denomina ángulo plano o ángulo rectilíneo de ángulo diedro, al ángulo formado por dos rayos perpendiculares a la arista en uno de sus puntos y situados uno en cada cara del diedro.

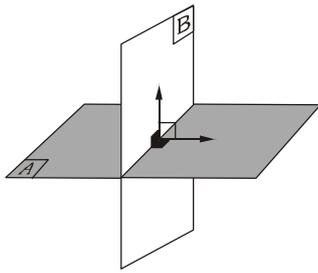


∠ MON : ángulo rectilíneo

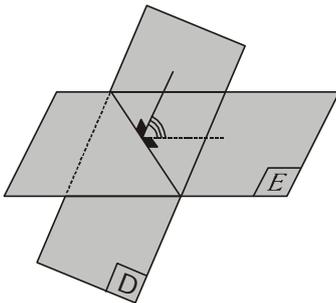
* Comúnmente, a la medida del ángulo MON se le denomina ángulo diedro o ángulo entre plano y plano.

PLANOS PERPENDICULARES

Definición :



A y B son perpendiculares

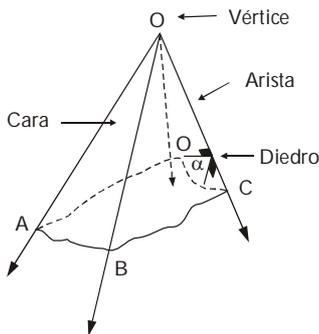


D y E son oblicuos

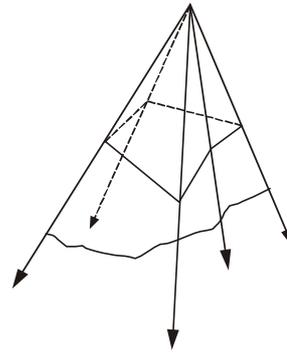
ÁNGULO POLIEDRO

Es aquella figura geométrica determinada al trazar desde un mismo punto tres o más rayos no alineados ni coplanares. Dicho punto vendrá a ser el vértice, los rayos sus aristas y los ángulos planos que determinan sus caras. Se denomina ángulo triedro, ángulo tetraedro, ángulo pentaedro, etc. Según el número de cara sea: 3, 4, 5, etc.; respectivamente.

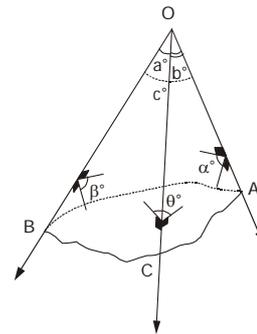
ÁNGULO POLIEDRO CONVEXO



ÁNGULO POLIEDRO NO CONVEXO



ÁNGULO TRIEDRO



ELEMENTOS :

- I. Vértice : O
- II. Aristas : \vec{OA} , \vec{OB} , \vec{OC}
- III. Caras: $\angle BOC$, $\angle AOC$ y $\angle AOB$
- IV. Diedros : α° , β° y θ°
(Medidas)

PROPIEDADES :

I. Suma de Medidas de las Caras

$$0^\circ < a^\circ + b^\circ + c^\circ < 360^\circ$$

Es válido para cualquier ángulo poliedro.

II. Desigualdad entre las Caras

$$\begin{aligned} b^\circ - c^\circ < a^\circ < b^\circ + c^\circ \\ a^\circ - c^\circ < b^\circ < a^\circ + c^\circ \\ a^\circ - b^\circ < c^\circ < a^\circ + b^\circ \end{aligned}$$

III. Suma de las Medidas de los Ángulos Diedros.

$$180^\circ < \alpha^\circ + \beta^\circ + \theta^\circ < 540^\circ$$

CLASIFICACIÓN :

I. Triedro Escaleno

$$a^\circ \neq b^\circ \neq c^\circ ; \alpha^\circ \neq \beta^\circ \neq \gamma^\circ$$

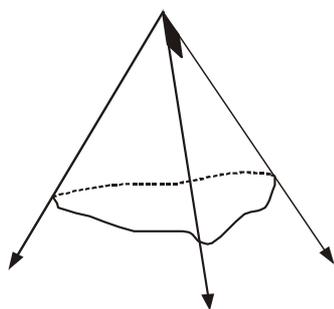
II. Triedro Isósceles

$$a^\circ \neq b^\circ \neq c^\circ ; \alpha^\circ \neq \beta^\circ \neq \theta^\circ$$

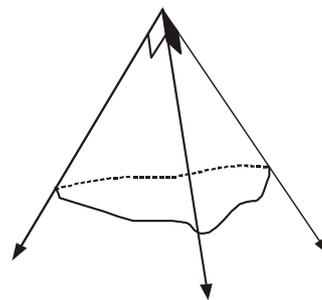
III. Triedro Isoedro o Equilátero

$$a^\circ = b^\circ = c^\circ ; \alpha^\circ = \beta^\circ = \theta^\circ$$

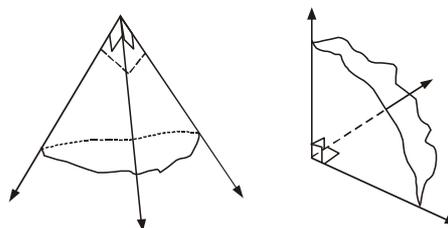
IV. Triedro Unirectángulo



V. Triedro Birectángulo

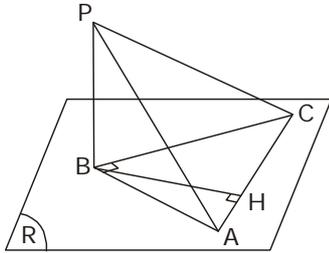


VI. Triedro Trirectángulo

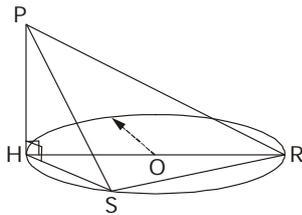


Test de aprendizaje preliminar

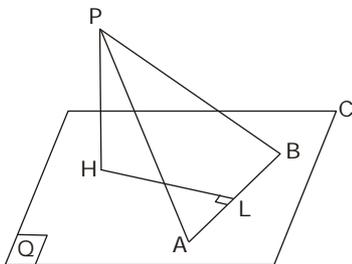
01. En el gráfico, \overline{PB} es perpendicular al plano R, $AH = 2u$, $HC = 8u$, $PB = 3u$. Calcular el área de la región APC.



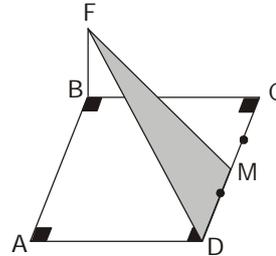
02. En el gráfico; $m \angle RHS = 30^\circ$; $OH = 5$, $PH = 5\sqrt{3}$. Calcular el área de la región PSR.



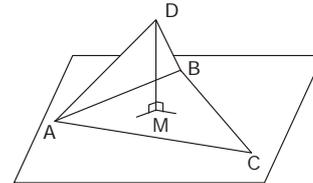
03. En el gráfico, \overline{PH} es perpendicular al plano Q, $PH = 12$, $AP = BP = 13$ y $AB = 8$. Calcular HL.



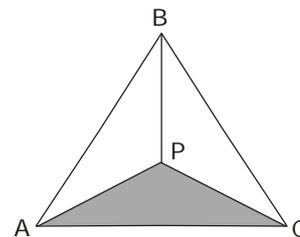
04. En el gráfico, \overline{BF} es perpendicular al plano del cuadrado ABCD. Si: $AB = BF = BC = a$ y "M" es punto medio de \overline{CD} , hallar el área de la región sombreada.



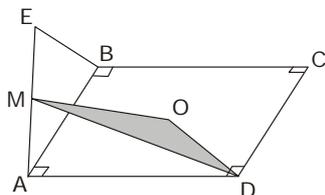
05. En el gráfico, $\triangle ABC$ es un triángulo equilátero de ortocentro M, \overline{MD} perpendicular al plano del triángulo. Calcular la medida del diedro formado por ABC y ABD. ($MD = \sqrt{27}$, $AC = 6$).



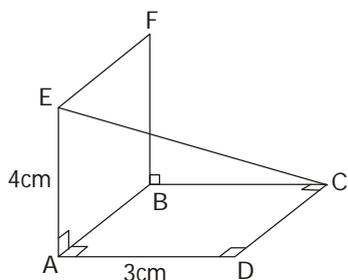
06. En la figura, hay un triedro cuyas caras son mutuamente ortogonales y la longitud de sus aristas es: $PA = PB = PC = 6m$. Hallar el área de la región triangular ABC.



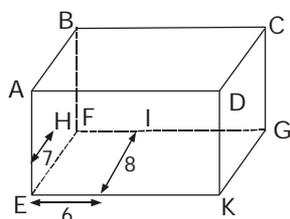
07. En la figura ABCD es un cuadrado y ABE es un triángulo equilátero, situados en planos perpendiculares. Si : $AB = 2\text{cm}$, $AM = ME$ y "O" es centro del cuadrado. Hallar el área del triángulo MOD.



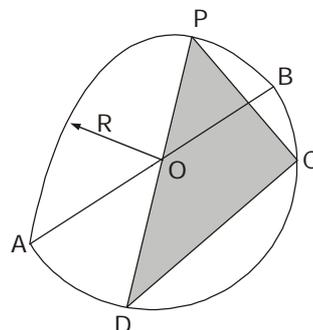
08. Hallar la menor distancia entre \overline{EC} y \overline{AB} en la figura mostrada.



09. La figura representa una caja; en el punto H sobre la cara ABFE se encuentra una hormiga, y en el punto I sobre la cara EFGK se encuentra su comida. Hallar la mínima distancia recorrida por la hormiga para llegar a I.



10. Calcular la medida del diedro formado por los semicírculos de radio "R". Si el área de la región PCD es $\frac{R^2}{2}$, además : $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$, $m\widehat{CD} = 90^\circ$. (P punto máximo del semicírculo).



Practiquemos :

11. Las proyecciones de un segmento de recta \overline{AB} sobre un plano y sobre una recta perpendicular al plano miden, respectivamente 12cm, 5cm. ¿Cuánto mide el segmento \overline{AB} ?
12. La distancia de un punto P a una recta contenida en un plano es de 13 cm. La distancia de la recta al pie de la perpendicular que va de P al plano es de 12cm. ¿Cuál es la distancia del punto al plano?
13. Un segmento de recta de 26 cm, une el punto A del plano "x" con el punto B del plano y, x e y son planos paralelos la proyección de AB sobre x o y mide 24m. La distancia entre x e y es:

14. Se han determinado como máximo 45 planos utilizando "n" rectas secantes. Calcular "n".

15. Tres planos paralelos determinan sobre una recta secante L_1 , los segmentos \overline{AE} y \overline{EB} y sobre otra L_2 , secante, los segmentos \overline{CF} y \overline{FD} . Si : $AB = 8m$, $CD = 12m$ y $FD-EB = 1m$. Calcular CF.

16. El radio de la circunferencia circunscrita a un triángulo regular ABC mide $2\sqrt{3}$ dm. Por "B" se levanta \overline{BF} perpendicular al plano del triángulo. Si \overline{BF} mide 2dm, calcular el área de la región triangular AFC.

17. Dado un triángulo rectángulo AOB isósceles, siendo $AO = OB = \sqrt{6}$ m, en el vértice O se eleva una perpendicular al plano AOB y se toma un punto M sobre esta perpendicular, uniendo M con los vértices A y B. Calcular el valor de \overline{OM} para que el diedro \overline{AB} mida 60° .

18. En un triángulo ABC, recto en B, los lados miden $AB = 6$ y $BC = 8$. Por el vértice B, se traza \overline{BF} perpendicular al plano ABC tal que $BF = 4,8$. Hallar la medida del ángulo diedro que forman los planos ABC y AFC.

19. Dado un triángulo rectángulo AOB, siendo : $OA = OB = 2a$; en O, se levanta una perpendicular al plano AOB, sobre la que se toma M, $OM = a\sqrt{6}$ y luego se une M con los puntos A y B. Calcular la medida del diedro AB.

20. Graficar al triángulo ABC y levante \overline{BQ} perpendicular al plano ABC. Si : $BQ = 4,8$ dm, $AB = 6$ dm, $BC = 8$ dm y $AC = 10$ dm. Calcular el valor del ángulo diedro \overline{AC} .

Problemas propuestos

21. Dos puntos A y B, situados a uno y otro lado de un plano X, distan de dicho plano, 6cm y 9cm, respectivamente. Si la proyección del segmento \overline{AB} sobre el plano es 30 cm. Hallar la distancia entre los puntos A y B.

- a) $15\sqrt{5}$ cm b) 15 c) $12\sqrt{3}$
 d) $12\sqrt{5}$ e) 12

22. Sean \vec{L}_1 y \vec{L}_2 dos rectas alabeadas que forman un ángulo de medida igual a 60° . En \vec{L}_1 se marcan los puntos "A" y "B", en \vec{L}_2 se marcan los puntos "P" y "Q" de modo que: \overline{AP} sea la mínima distancia entre ellas y $AB = PQ = 2(PA)$. Calcular la relación de QB y AP.

- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) $\sqrt{4}$
 d) $\sqrt{5}$ e) $\sqrt{6}$

23. Los planos que contienen a los rectángulos ABCD y BCEF forman un ángulo diedro recto, tal que : $BC = 8$ y $BF = 6$, entonces, la longitud del segmento que une los puntos medios de \overline{FD} y \overline{AB} es:

- a) 4 b) 4,5 c) 5
 d) 5,5 e) 6

24. Sea ABC un triángulo equilátero se levanta \overline{CF} perpendicular al plano del triángulo ABC de modo que $\overline{CF} \cong \overline{BA}$. Calcular la medida del ángulo diedro que forman los planos ABC y AFB.
- a) 30° b) $\text{ArcSen} \frac{2\sqrt{7}}{7}$
 c) $\text{ArcSen} \frac{\sqrt{7}}{7}$ d) $\text{ArcSen} \frac{3\sqrt{7}}{7}$
 e) $\text{ArcSen} \frac{\sqrt{6}}{3}$
25. Uno de los catetos de un triángulo isósceles está contenida en el plano "P" y el otro forma con dicho plano un ángulo de 45° . Calcular el ángulo que forma su hipotenusa con el plano "P".
- a) 45° b) 30° c) 60°
 d) $\text{ArcSen} \frac{1}{5}$ e) $\text{ArcCos} \frac{\sqrt{2}}{4}$
26. La recta l de intersección de dos planos x e y, perpendiculares entre sí, es paralela a una recta R del plano "x" y a una recta S del plano y si la distancia entre l y R es de 16 cm, y la distancia entre l y S es de 12 cm. ¿Cuál es la distancia entre R y S?
- a) 14 cm b) 25 c) $4\sqrt{28}$
 d) $10\sqrt{3}$ e) 20
27. Calcular el máximo valor entero de las caras de un triedro si las otras dos miden 100° y 120° .
- a) 100° b) 112° c) 139°
 d) 140° e) 141°
28. Calcular el máximo valor de una cara de un triedro equilátero.
- a) 100° b) 110° c) 130°
 d) 119° e) 141°
29. A-BCD es un triedro trirectángulo de modo que $\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{AD} = 6\text{m}$. Si O es la proyección de A sobre el plano BCD, entonces la distancia que hay entre O y la arista \overline{AB} es:
- a) 8 m b) $4\sqrt{3}$ c) $6\sqrt{2}$
 d) $2\sqrt{2}$ e) $2\sqrt{3}$
30. Calcular el máximo número de planos que determinan 8 rectas paralelas y 6 puntos en el espacio.
- a) 48 b) 72 c) 84
 d) 96 e) 106
31. Si un plano es paralelo a una recta:
- a) Toda perpendicular a la recta será paralela al plano.
 b) Toda recta paralela al plano será paralela a la recta dada.
 c) Todo plano perpendicular al plano dado será paralelo a la recta dada.
 d) Toda recta que es perpendicular al plano tendrá que ser perpendicular a la recta.
 e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.
32. Si una recta es perpendicular a tres rectas dadas :
- a) Las tres rectas dadas tienen que ser paralelas.
 b) Las tres rectas dadas tienen que estar en un mismo plano que contenga la perpendicular.
 c) Por las tres rectas pueden pasar tres planos paralelos entre sí.
 d) Por las tres rectas dadas no pueden pasar planos paralelos entre sí.
 e) Ninguna de las afirmaciones anteriores es correcta.
33. Cuando dos planos son perpendiculares :
- a) Todo plano perpendicular a uno de ellos lo es también al otro.
 b) Toda recta perpendicular a la intersección de ambos debe estar contenida en uno de ellos.
 c) Todas las rectas de uno de ellos son perpendiculares al otro.
 d) No siempre se cortan.
 e) Todo plano perpendicular a su interacción es perpendicular a ambos.
34. Se tienen los segmentos alabeados \overline{AB} y \overline{CD} ortogonales: $AB = 4$ y $CD = 6$. Hallar la longitud del segmento que une los puntos medios de AC y BD.
- a) 3 b) 4 c) $\sqrt{13}$
 d) $\sqrt{11}$ e) $\sqrt{15}$
35. Dado un triángulo rectángulo isósceles AOB, siendo $OA = OB = 7a$, en O se levanta una perpendicular al plano: AOB, sobre lo que se toma: $\overline{OM} = \frac{7a\sqrt{6}}{6}$ y, se une el punto M con los vértices A y B. Se pide calcular el valor o medida del diedro \overline{AB} .
- a) 15° b) 18° c) 30°
 d) 40° e) 45°
36. El área de la proyección de un cuadrado sobre un plano que al pasar por su diagonal forma un ángulo de 60° con el plano del cuadrado, es 18,2 centiáreas. El área del cuadrado, en centiáreas es:
- a) 36,4 b) 21,3 c) 18,2
 d) 9,1 e) 31,6

37. El punto A está 8 cm encima de un plano horizontal y el punto B está 4cm encima del mismo plano. La proyección de \overline{AB} sobre el plano mide 9 cm. Calcular la longitud en cm del menor camino de A a B pasando por un punto del plano.
- a) 15 b) 17 c) 14
d) 21 e) 13
38. Un triángulo se encuentra en un plano que forma un ángulo de 45° con otro plano P. Si la proyección del triángulo sobre el plano P tiene 20cm^2 de área, encontrar en cm^2 el área del triángulo del espacio.
- a) $20\sqrt{2}$ b) $18\sqrt{2}$ c) $24\sqrt{2}$
d) 24 e) 30
39. Una hoja de papel de forma rectangular ABCD, tiene como dimensiones: $\overline{AB} = 8(\sqrt{5} - 1)\text{m}$, $\overline{BC} = 3\text{m}$. Por los puntos medios de \overline{AB} y \overline{CD} , se dobla la hoja de papel de manera que el ángulo diedro formado es de 72° . Hallar la distancia mínima que existe entre la arista del diedro y el segmento que une el centro de sus caras.
- a) 2 cm b) 3 c) 4
d) $(\sqrt{5} + 1)\text{m}$ e) $\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}$
40. En una circunferencia de diámetro $\overline{AB} = 10$ cm, se escoge un punto P sobre dicha circunferencia; si hacemos girar α° la circunferencia sobre su diámetro la nueva ubicación de P es P'. Hallar AP para que el perímetro del triángulo PMP' sea máximo, siendo M la proyección de P sobre \overline{AB} .
- a) 5 cm b) 10 c) $5\sqrt{2}$
d) $10\sqrt{2}$ e) $5\sqrt{3}$
41. Un triángulo isósceles ABC, donde : $\overline{AB} = \overline{AC} = a$, está inscrito en un círculo de radio a. En A, se levanta una perpendicular \overline{AD} al plano del triángulo y se une el punto D con los vértices, B y C. Calcular la longitud del segmento \overline{DB} para que el diedro D-BC-A mida 30° .
- a) $a\sqrt{\frac{13}{3}}$ b) $a\sqrt{\frac{13}{12}}$ c) $\frac{a}{2}\sqrt{\frac{13}{3}}$
d) $\frac{a}{2}\sqrt{13}$ e) $a\sqrt{13}$
42. Dado un triedro S-ABC, si \overrightarrow{SC} forma con la bisectriz de la cara opuesta un ángulo igual a la mitad de dicha cara, calcular el diedro C, si: diedro A + diedro B = 120° .
- a) 90° b) 45° c) 135°
d) 60° e) 120°
43. Sea "C" un círculo de centro "O" y un cuadrado ABCD que se encuentran contenidos en planos perpendiculares (sea \overline{AB} una cuerda de "C"). Se marca "M" en \overline{DC} , de modo que : $3DM = 5MC$, $\overline{AB} = 8\text{dm}$ y $\overline{OA} = 5\text{dm}$. Calcular la distancia de "M" a \overline{OB} .
- a) $41/5$ dm b) $4\sqrt{3}$ c) $42/5$
d) $40/7$ e) $40/3$
44. Por el circuncentro "O" del triángulo equilátero ABC, se traza \overline{OP} perpendicular al plano del triángulo. Marque "H" ortocentro del triángulo APB y calcular la medida del ángulo entre \overline{AP} y \overline{HC} . ($\overline{AC} = \overline{AD}$).
- a) 37° b) 45° c) 60°
d) $53^\circ/2$ e) 90°
45. Un triángulo equilátero ABC está en un plano perpendicular a un cuadrado ABDE. El segmento de recta que une el punto medio de lado \overline{AC} con el punto medio del lado \overline{BD} del cuadrado mide 1m. ¿Cuál es la longitud del lado del triángulo o del cuadrado?
- a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 1,5
d) 1 e) 2
46. Dado un triángulo ABC, equilátero se traza \overline{AE} , perpendicular al plano del triángulo. Si : $\overline{AE} = \overline{BC}$, calcular la medida del ángulo con que se cruzan \overline{EB} y \overline{AC} .
- a) 75° b) 90° c) 120°
d) 150° e) $\text{ArcCos}(-\frac{\sqrt{2}}{4})$
47. Dado un triángulo ABC. $\overline{AB} = 15$; $\overline{BC} = 8$ y $\overline{AC} = 17$. Por el incentro "I" se eleva \overline{ID} , perpendicular al plano ABC, siendo: $\overline{ID} = \sqrt{247}$. Calcular la medida del ángulo DAB.
- a) 37° b) 53° c) 60°
d) 45° e) 75°
48. Sobre una circunferencia de centro "O" y radio cuya longitud es 10m, se ubican los puntos "A" y "B", tal que: $m\widehat{AB} = 127^\circ$. Por "B" se levanta \overline{BP} , perpendicular al plano del círculo, siendo: $\overline{BP} = 24\text{m}$. Calcular el área de la región triangular AOP.
- a) $32\sqrt{10}$ b) $45\sqrt{10}$ c) $38\sqrt{10}$
d) $40\sqrt{10}$ e) $42\sqrt{10}$

49. Dados dos planos no paralelos se toma un segmento \overline{AD} perteneciente a uno de los planos. Si \overline{BC} es la proyección de \overline{AD} sobre el otro plano, hallar la distancia \overline{AB} , sabiendo que: $\frac{BC}{6} = \frac{DC}{3} = \frac{AB}{2}$ y el área del cuadrilátero ABCD es de 60m^2 .
- a) 1 m b) 2 c) 3
d) 4 e) 5
50. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, cuyo cateto $AB = 3\text{m}$. Se traza la mediana \overline{BM} ; luego, por B se levanta un segmento \overline{BH} perpendicular al plano del triángulo ABC. Si el área de BHM es $5\sqrt{5}\text{m}^2$ y el área de su proyección sobre el plano determinado por BHC es de 10m^2 , hallar la medida de la hipotenusa AC.
- a) $3\sqrt{3}\text{m}$ b) $4\sqrt{3}$ c) $5\sqrt{5}$
d) $2\sqrt{5}$ e) $3\sqrt{5}$
51. Dados los planos secantes P y Q, en P está contenido el triángulo ABC y en Q su proyección, el triángulo $A_1B_1C_1$. Si: $\overline{BC} \cong \overline{B_1C_1}$, $m \angle ACB = 90^\circ$, $m \angle BAC = 30^\circ$ y $m \angle A_1B_1C_1 = 45^\circ$, calcular el coseno del ángulo diedro formado por los planos secantes P y Q.
- a) $\sqrt{3}/2$ b) $\sqrt{2}/2$ c) $\sqrt{3}/3$
d) $\sqrt{6}/4$ e) $1/2$
52. Las caras de un ángulo diedro son cortadas en los puntos M y N por una recta; siendo A la proyección ortogonal de estos puntos sobre la arista, la mitad del ángulo diedro es igual a la semidiferencia de los ángulos \widehat{ANM} , \widehat{AMN} ; y si estos últimos están en la relación de 3 a 1. ¿Cuál es el valor del ángulo diedro?
- a) 30° b) 40° c) 50°
d) 60° e) 70°
53. En el plano P, se tiene el triángulo ABC, cuyo ángulo A mide 60° . Se tiene un punto S fuera del plano P. Si las distancias, de S al punto A es igual a 25cm , de S al lado \overline{AC} igual a 20cm , y de S al lado \overline{AB} igual a 7cm . Hallar la distancia de S al plano P.
- a) $\sqrt{37}\text{cm}$ b) $\sqrt{39}$ c) $\sqrt{38}$
d) 6 e) $\sqrt{31}$
54. En una mesa, se coloca perpendicularmente una lámina rectangular apoyada sobre su base. Si la altura y la base de la lámina miden "a" cm y "b" cm, respectivamente, ¿qué relación debe existir entre estas longitudes de tal manera que si la lámina empieza a girar sobre su base, la proyección sobre la mesa en algún momento sea un cuadrado?
- a) $a < b$ b) $a = b$ c) $a > b$
d) $a = \sqrt{2}b$ e) $b = \sqrt{2}a$
55. Los vectores \overrightarrow{OG} , \overrightarrow{OC} y \overrightarrow{OH} son mutuamente perpendiculares y son de igual longitud ($|\overrightarrow{OG}| = |\overrightarrow{OC}| = |\overrightarrow{OH}| = a$). Sea P el baricentro del $\triangle CGH$. Hallar la suma de las distancias trazadas desde P a los tres planos formados por los tres tomados dos a dos.
- a) $2a$ b) $3a$ c) $\frac{2}{3}a$
d) a e) $\frac{3}{2}a$
56. Se tiene un cuadrado ABCD de lado igual a $\sqrt{2}\text{cm}$. Un semicírculo de diámetro OC es perpendicular al plano del cuadrado y se traza la tangente \overline{AP} . Hallar el área del triángulo APB siendo "O" centro del cuadrado.
- a) $\sqrt{5}\text{cm}^2$ b) $2\sqrt{5}$ c) $\frac{\sqrt{5}}{2}$
d) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{5}}{3}$
57. Por el vértice "A" de un triángulo ABC, se levanta la perpendicular \overline{AM} al plano del triángulo. Se trazan las perpendiculares \overline{AP} y \overline{AQ} a \overline{MB} y \overline{MC} respectivamente. Si: $MQ = 5\text{cm}$; $PB = 6\text{cm}$; $MP = 4\text{cm}$ y $m \angle BMC = 30^\circ$, hallar el área de la región triangular BMC.
- a) 10cm^2 b) 15 c) 18
d) 20 e) 30
58. Un triángulo se encuentra en un plano que forma un ángulo de 45° con otro plano "P". Si la proyección del triángulo sobre "P" tiene 20cm^2 de área, hallar el área del triángulo.
- a) 10cm^2 b) $10\sqrt{2}$ c) 20
d) $20\sqrt{2}$ e) $30\sqrt{2}$
59. Por el vértice "B" de un cuadrado ABCD, se traza una perpendicular \overline{BP} al plano del cuadrado, "M" es punto medio de \overline{AD} ; si la distancia de "P" a la recta que contiene al vértice "C" y "M" es $4\sqrt{6}u$ y la distancia de "P" al plano del cuadrado es $4u$, entonces el lado del cuadrado es:
- a) 8 b) 9 c) 10
d) 12 e) 15
60. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en "B", $AB = 15u$ y $BC = 20u$, por un punto "P" exterior al plano ABC, se construyen diedros congruentes AB, BC y AC. Si la distancia de "P" al plano mide $12u$, hallar la distancia de "P" al lado AC.
- a) 13 u b) 15 c) 14
d) 16 e) 18

Claves

21.	<i>a</i>
22.	<i>d</i>
23.	<i>c</i>
24.	<i>b</i>
25.	<i>b</i>
26.	<i>e</i>
27.	<i>c</i>
28.	<i>d</i>
29.	<i>e</i>
30.	<i>d</i>
31.	<i>e</i>
32.	<i>c</i>
33.	<i>e</i>
34.	<i>c</i>
35.	<i>c</i>
36.	<i>a</i>
37.	<i>a</i>
38.	<i>a</i>
39.	<i>c</i>
40.	<i>c</i>

41.	<i>b</i>
42.	<i>d</i>
43.	<i>a</i>
44.	<i>e</i>
45.	<i>d</i>
46.	<i>e</i>
47.	<i>b</i>
48.	<i>d</i>
49.	<i>d</i>
50.	<i>e</i>
51.	<i>c</i>
52.	<i>d</i>
53.	<i>a</i>
54.	<i>d</i>
55.	<i>c</i>
56.	<i>e</i>
57.	<i>b</i>
58.	<i>d</i>
59.	<i>a</i>
60.	<i>a</i>