

Capítulo

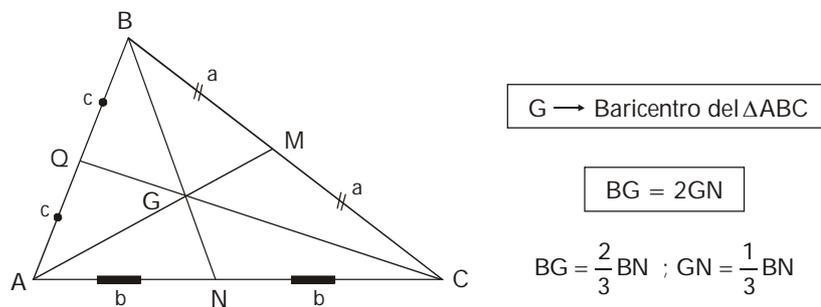
8

PUNTOS NOTABLES

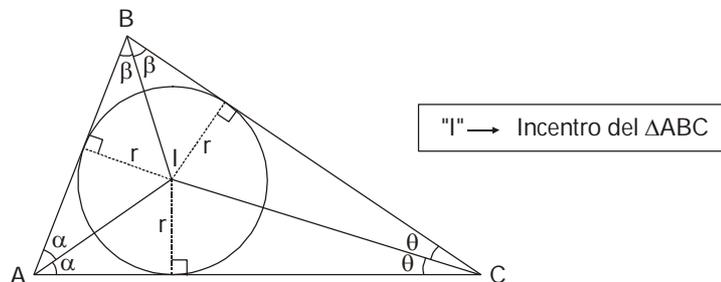
Son los puntos de concurrencia de las líneas notables de un triángulo.

I. BARICENTRO : Es el punto de intersección de las 3 medianas de un triángulo.

Propiedad : El baricentro determina en cada mediana dos segmentos que están en la relación de 2 es a 1.



II. INCENTRO : Es el punto de intersección de las 3 bisectrices interiores de un triángulo.



Propiedades :

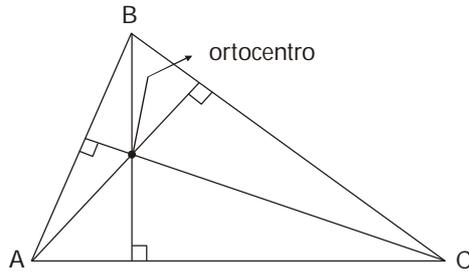
Primera : El incentro es el centro de la circunferencia inscrita.

Segunda : El incentro equidista de los lados del triángulo.
(una distancia r) → inradio.

III. ORTOCENTRO : Es el punto de concurrencia de las tres alturas de un triángulo.

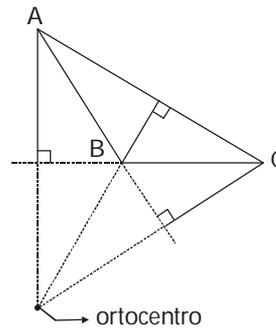
1. En un triángulo acutángulo, el ortocentro se encuentra en la región triangular.
2. En un triángulo obtusángulo, el ortocentro es exterior al triángulo.
3. En un triángulo rectángulo, el ortocentro se encuentra en el vértice del ángulo recto.

1.



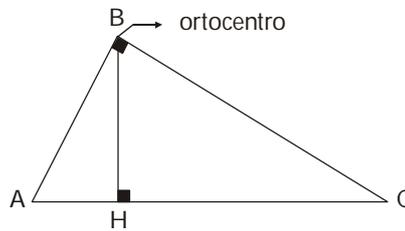
Δ **Acutángulo**

2.



Δ **Obtusángulo**

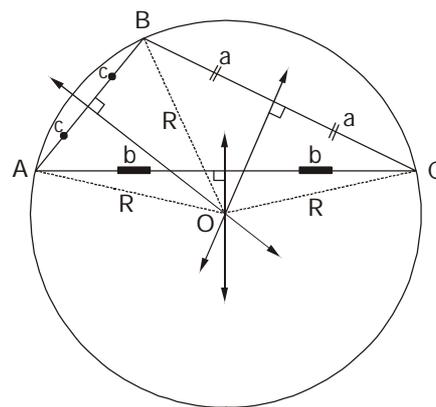
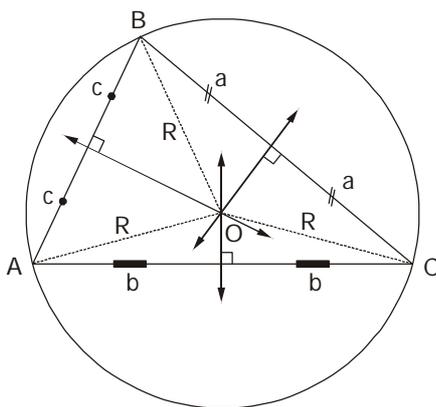
3.

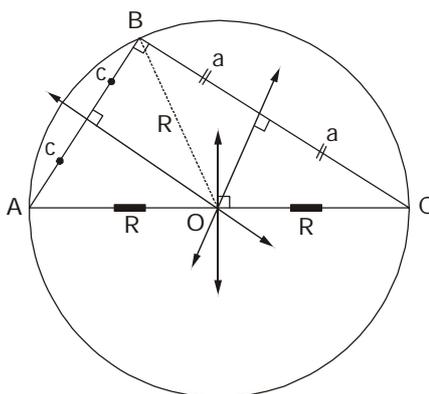


Δ **Rectángulo**

IV. CIRCUNCENTRO : Es el punto de intersección de las mediatrices, de los lados de un triángulo.

"O" → Circuncentro del ΔABC





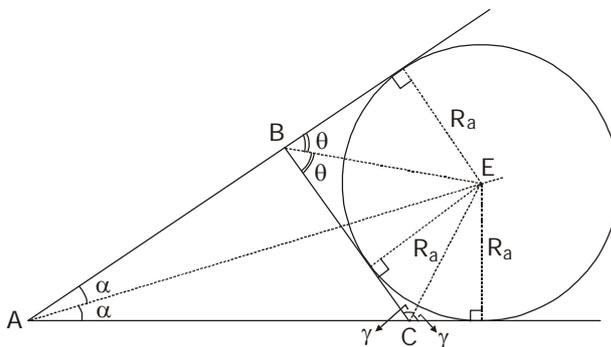
Propiedades :

1ra. : El circuncentro es el centro de la circunferencia circunscrita.

2da. : El circuncentro equidista de los vértices del triángulo.
(Una distancia R). $R \rightarrow$ circunradio.

- V. **EXCENTRO** : Es el punto de intersección de dos bisectrices exteriores y una bisectriz interior.
Nota : Todo triángulo tiene tres excentros.

$E \rightarrow$ Excentro relativo al lado \overline{BC}



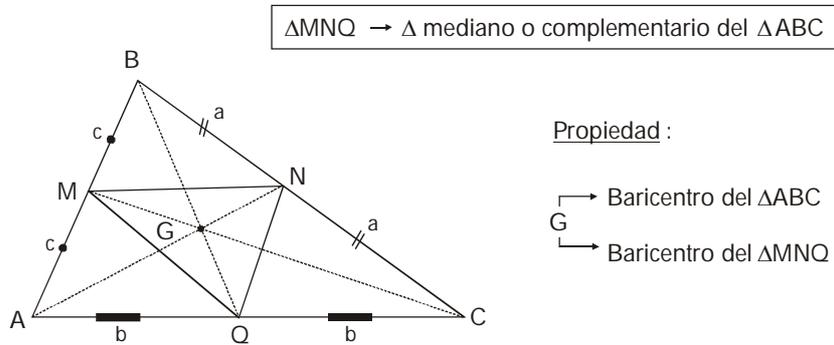
Propiedades :

1ra. Propiedad : El excentro es el centro de la circunferencia exinscrita.

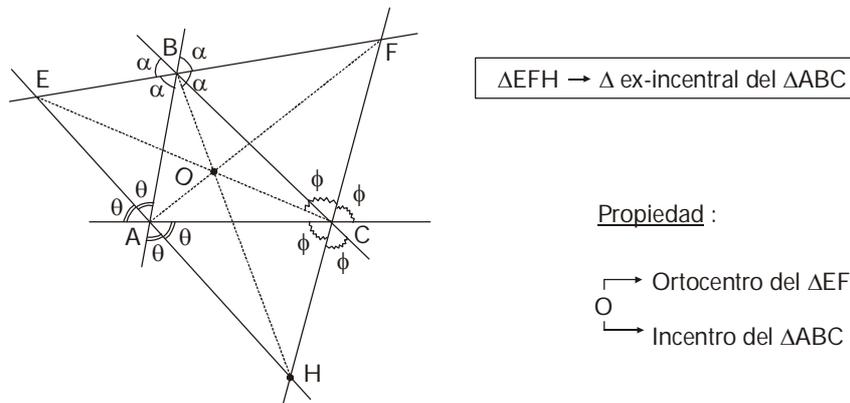
2da. Propiedad : El excentro equidista de un lado y de las prolongaciones de los otros dos lados, (una distancia R_a)
 $R_a \rightarrow$ Exradio relativo a \overline{BC} .

TRIÁNGULOS PARTICULARES

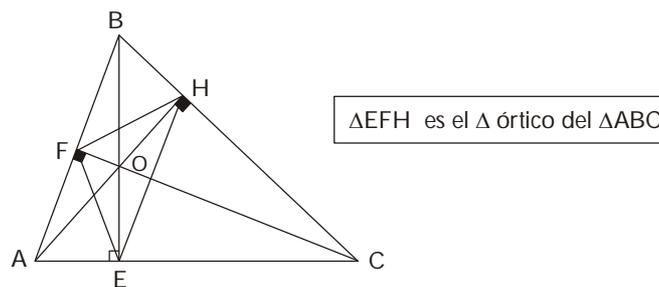
1. **TRIÁNGULO MEDIANO** : Es el triángulo que se determina al unir los puntos medios de los lados de un triángulo.



2. **TRIÁNGULO EX-INCENRAL** : Es el triángulo que se determina al unir los tres excentros.

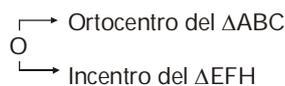


3. **TRIÁNGULO ÓRTICO O PEDAL** : Es el triángulo que se determina al unir los pies de las 3 alturas de un triángulo.



Propiedades :

1ra. Propiedad :



2da. Propiedad :

Siendo : \hat{E} , \hat{F} y \hat{H} los ángulos internos de ΔEFG .

$$m\hat{H} = 180^\circ - 2(m\hat{A})$$

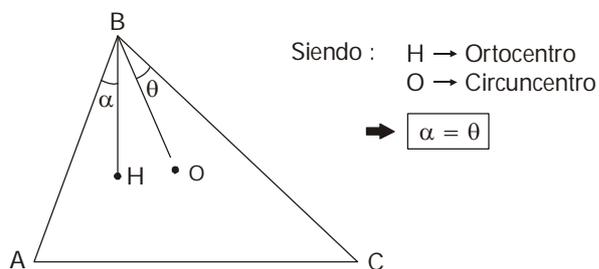
$$m\hat{E} = 180^\circ - 2(m\hat{B})$$

$$m\hat{F} = 180^\circ - 2(m\hat{C})$$

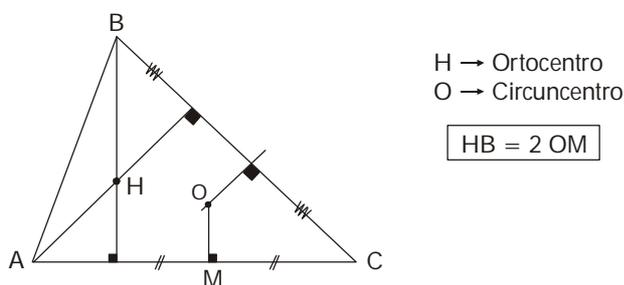
3ra. Propiedad : A, B y C son excentros del ΔEFH .

PROPIEDADES ADICIONALES

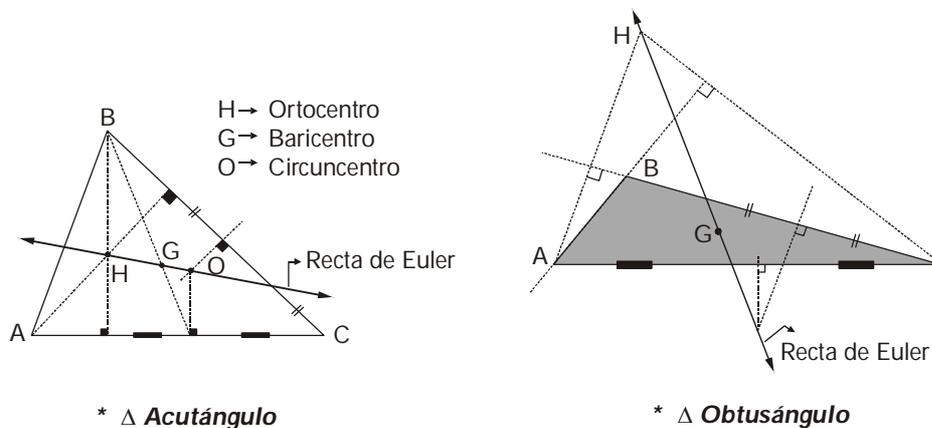
1.



2. La distancia del ortocentro a un vértice es el doble de la distancia del circuncentro al lado opuesto del vértice considerado.

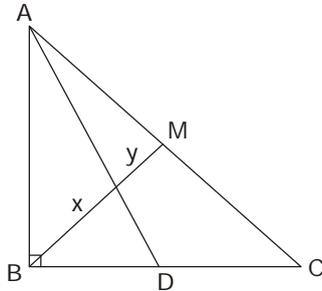


3. El ortocentro, baricentro y circuncentro se encuentran en una misma recta; llamada la **Recta de Euler**.



Test de aprendizaje preliminar

01. En el gráfico : \overline{AD} y \overline{BM} son medianas del triángulo rectángulo ABC, y $AC = 30$ u.
Calcule "x" e "y" en metros.



02. Un triángulo ABC se trazan las alturas \overline{AE} y \overline{BF} que se intersectan en "D". Si el ángulo ADC mide 125° .
Calcule la $m\angle ABE$.

03. En un triángulo ABC, de baricentro G, $m\angle BGC = 90^\circ$,
 $m\angle GBC = 30^\circ$; $GC = 2m$. Calcule AG.

04. En el arco AC de una semicircunferencia de diámetro \overline{AC} , se ubica el punto "B", tal que "E" es el excentro del triángulo ABC relativo a \overline{BC} , \overline{AE} interseca al arco BC en "D"; tal que $BD = 2u$. Calcule CE.

05. En un cuadrilátero ABCD; $m\angle B = 120^\circ$; $m\angle D = 110^\circ$,
 $m\angle ABD = 60^\circ$ y $m\angle ADB = 40^\circ$.
Calcule la medida del ángulo que forman sus diagonales.

06. La distancia entre el centro de la circunferencia circunscrita a un triángulo rectángulo y el punto de intersección de sus tres alturas es igual a :

07. En un triángulo ABC acutángulo la $m\angle BAC = 72^\circ$.
Calcule la $m\angle OBC$, siendo "O" su circuncentro.

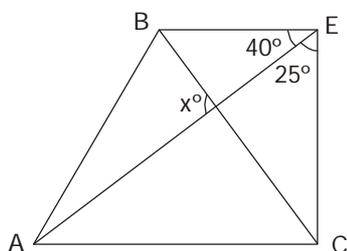
08. En un triángulo ABC se traza la ceviana interior \overline{BR} , tomando como diámetro \overline{AR} se traza la semicircunferencia que interseca a \overline{BR} en "O". Calcule la $m\angle BCA$, si "O" es el circuncentro del triángulo ABC.

09. En un triángulo ABC de circuncentro "K" y excentro relativo a \overline{BC} "E".
Calcule la $m\angle BKC$, siendo la $m\angle BEC = 60^\circ$.

10. Se tiene un triángulo ABC de ortocentro "O" y circuncentro "K", $m\angle ABC = 60^\circ$ en el cual se traza la altura \overline{BH} .
 Calcule la $m\angle KOH$, si: $m\angle AOH = 40^\circ$.

Practiquemos :

11. En el gráfico, calcule x° , si "E" es el excentro del triángulo ABC.

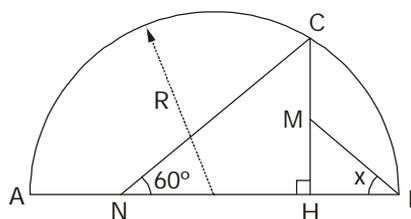


12. En un triángulo acutángulo ABC, se cumple que : $m\angle AHC = 2m\angle AKC$, donde "H" es el ortocentro y "K" el es circuncentro del triángulo ABC.
 Calcule la $m\angle B$.

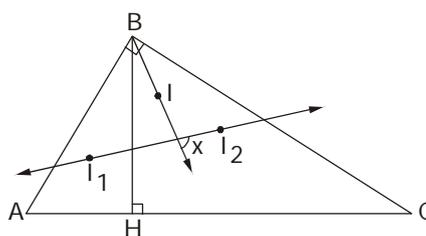
13. En un triángulo acutángulo ABC, se ubica el ortocentro "H" y se traza el cuadrado BHGL, G pertenece a \overline{BC} .
 Calcule la $m\angle HGA$, si: $m\angle ABC = 54^\circ$.

14. En un triángulo ABC de incentro "I" y excentro "E" relativo al lado \overline{BC} , la diferencia entre el exradio relativo a \overline{BC} y el inradio es dos veces la distancia del vértice C a \overline{EI} , y además la $m\angle ABC = 30^\circ$.
 Calcule la $m\angle ACB$.

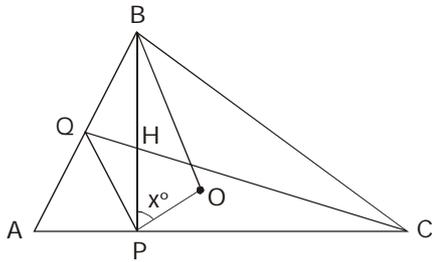
15. En el gráfico, calcule " x° ", si : M y N son puntos medios de \overline{CH} y \overline{AH} respectivamente.



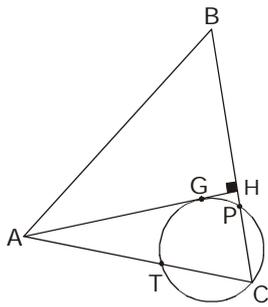
16. Calcule " x° ", si : I, I_1 , I_2 son incentros de los triángulos ABC, AHB y BHC respectivamente.



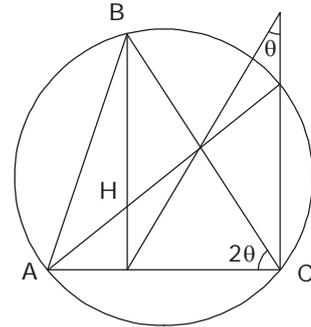
17. En el gráfico : $\overline{PQ} \parallel \overline{BO}$, "H" y "O" son ortocentro y circuncentro del triángulo ABC, respectivamente. Calcule "x°".



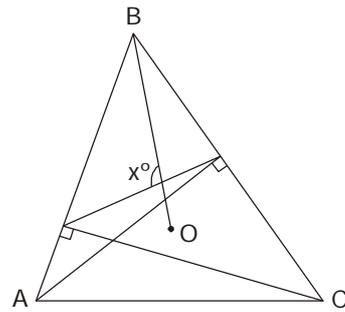
18. En el gráfico, "G" es el baricentro de la región triangular ABC, calcule BP, si : $AG = 12$ u y $PC = 16$ u. ("G" es punto de tangencia).



19. Se considera el triángulo ABC de ortocentro H. Calcule "θ°".

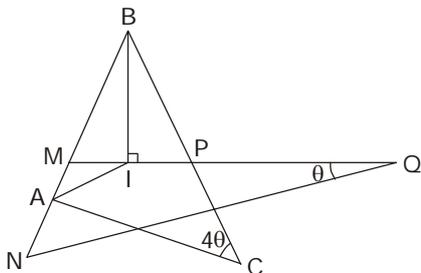


20. En el gráfico, "O" es el circuncentro del triángulo ABC. Calcule "x°".



Problemas propuestos

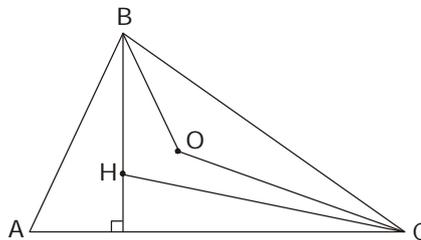
21. En el gráfico mostrado, "I" es incentro del triángulo ABC, AM = AN y AI = 3u. Calcule : PQ.



- a) $3\sqrt{3}$ u b) 8 u c) 6 u
 d) $6\sqrt{2}$ u e) $3\sqrt{2}$ u
22. Se tiene un triángulo rectángulo ABC, recto en B, de incentro I, se traza $IH \perp AC$. Calcule HC si su exradio relativo a \overline{BC} mide 4 m.
- a) 3 m b) 4 m c) $4\sqrt{2}$ m
 d) 2 m e) $4\sqrt{3}$ m
23. En la prolongación de lado \overline{AB} de un cuadrilátero ABCD se marca el punto E, tal que : $m \angle EBC = 48^\circ$, $m \angle CBD = 78^\circ$, $m \angle BDC = 30^\circ$, $m \angle ADB = 54^\circ$. Calcule la $m \angle BAC$.
- a) 9° b) 18° c) 36°
 d) 30° e) 54°
24. Se tiene un triángulo isósceles ABC de base \overline{AC} , ortocentro "H" y circuncentro "O". $m \angle OAH = m \angle OBC$. Calcule la $m \angle ABO$.
- a) 15° b) 18° c) $18^\circ 30'$
 d) $22^\circ 30'$ e) $26^\circ 30'$
25. Se tiene un triángulo acutángulo ABC, de ortocentro "H" y circuncentro "O". Calcule la $m \angle HBO$, si : $m \angle BAC - m \angle ACB = 40^\circ$.
- a) 20° b) 30° c) 40°
 d) 50° e) 60°

26. En el gráfico : "H" es el ortocentro del triángulo ABC, "O" es el circuncentro y $\frac{HB}{OB} = \frac{6}{5}$.

Calcule la suma de las medidas de los ángulos HCO y OBC.



- a) 30° b) 37° c) 45°
 d) 53° e) 60°
27. En un triángulo ABC acutángulo de ortocentro "O", la recta de Euler corta en el punto "F" al lado AC. Calcule la $m \angle FDC$. Si $AF = 2FC = 2OB$. ("D" es circuncentro del triángulo ABC).
- a) $53^\circ/2$ b) $37^\circ/2$ c) 45°
 d) 30° e) 60°
28. En un triángulo ABC, se ubican los puntos interiores "H" (ortocentro) y "O" (circuncentro), $m \angle ABC = 60^\circ$. Calcule la medida del ángulo que forman las rectas \overleftrightarrow{BC} y \overleftrightarrow{HO} .
- a) 30° b) 45° c) 60°
 d) 90° e) 40°
29. En un triángulo acutángulo ABC de ortocentro "H", la recta de Euler interseca a los lados \overline{AB} y \overline{BC} en los puntos P y Q respectivamente, tal que : $PB = BQ$. Calcule la distancia de P a \overline{BC} . Si : $AH + HC = 18$ u.
- a) 9 u b) 10 u c) 6 u
 d) 4,5 u e) 3 u
30. En un triángulo ABC, se tiene que : $BH = BO$, $m \angle ABH = 2m \angle HBO$. Calcule la $m \angle HAO$, siendo "H" el ortocentro y "O" su circuncentro.
- a) 9° b) 5° c) 10°
 d) 8° e) 6°
31. Para determinar en un plano la posición de un punto equidistante de 3 puntos A, B y C (que no pertenecen a una línea recta), se busca la intersección de :
- a) Las bisectrices de los ángulos ABC y BCA.
 b) Las mediatrices de \overline{AB} y \overline{AC} .
 c) La bisectriz de ABC y la mediatriz de \overline{AC} .
 d) La mediatriz de \overline{AB} y la bisectriz del ángulo ABC.
 e) La altura y la mediatriz de \overline{AB} y \overline{BC} .

32. Sea un triángulo ABC inscrito en una circunferencia y sean los puntos C', B' y A' los puntos medios de los arcos AB, BC y CA respectivamente. ¿Qué punto notable es el incentro del triángulo ABC para el $\Delta A'B'C'$?

- a) Ortocentro.
- b) Incentro.
- c) Circuncentro.
- d) Baricentro.
- e) Excentro.

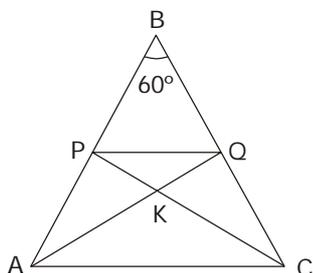
33. En un cuadrado ABCD en los lados \overline{BC} y \overline{CD} se ubican los puntos medios M y N, tal que $\overline{AM} \cap \overline{BN} = \{P\}$. ¿Qué punto notable es el centro del cuadrado respecto al triángulo NPA?

- a) Ortocentro.
- b) Ex-centro.
- c) Baricentro.
- d) Incentro.
- e) Circuncentro.

34. Las prolongaciones de las alturas en un triángulo acutángulo ABC intersectan a la circunferencia circunscrita en los puntos M, N y P. ¿Qué punto notable es el ortocentro del triángulo ABC respecto al triángulo MNP?

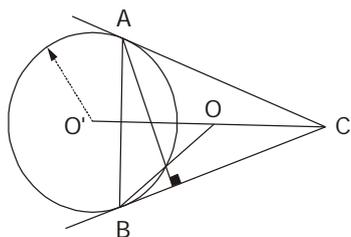
- a) Ortocentro.
- b) Excentro.
- c) Baricentro.
- d) Incentro.
- e) Circuncentro.

35. En el gráfico, $AP = PQ = QC$. ¿Qué punto notable es "K" respecto del triángulo ABC?



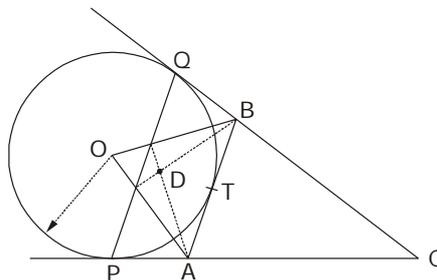
- a) Incentro.
- b) Circuncentro.
- c) Ortocentro.
- d) Baricentro.
- e) Excentro.

36. En el gráfico mostrado, ¿qué punto notable es "O", para el triángulo ABC? (A, B, puntos de tangencia).



- a) Incentro.
- b) Baricentro.
- c) Ortocentro.
- d) Circuncentro.
- e) Excentro.

37. En el gráfico : P, Q y T puntos de tangencia, ¿Qué punto notable es "D" para el triángulo OBA?



- a) Ortocentro.
- b) Baricentro.
- c) Incentro.
- d) Circuncentro.
- e) Jerabek.

38. Sobre los lados \overline{BC} y \overline{AD} de un rectángulo ABCD se toman los puntos M y P respectivamente, tal que : $PMCD$ es un cuadrado de centro O, si : $\{AO \cap MP\} = \{Q\}$, $AB = BQ$. Calcule la $m \angle OAD$.

- a) 15°
- b) $26^\circ 30'$
- c) $22^\circ 30'$
- d) $18^\circ 30'$
- e) 30°

39. ¿Qué punto notable es el vértice de un ángulo obtuso de un triángulo obtusángulo para su respectivo triángulo pedal?

- a) Baricentro.
- b) Circuncentro.
- c) Incentro.
- d) Ortocentro.
- e) Punto de Gergonne.

40. En un triángulo ABC interiormente se ubica el punto "P" y sobre los lados \overline{AC} y \overline{BC} los puntos R y Q respectivamente, tal que los triángulos APR y BPQ son equiláteros, además $m \angle RPO = 90^\circ$. Decir qué punto notable es "P" del triángulo ABC.

- a) Ortocentro.
- b) Incentro.
- c) Baricentro.
- d) Circuncentro.
- e) Cualquier punto.

41. En un triángulo isósceles ABC, la : $m \angle B = 120^\circ$. Calcule la $m \angle IEK$, siendo : I : incentro y E : excentro relativo al lado \overline{BC} y K = circuncentro.

- a) 15°
- b) 20°
- c) 30°
- d) 25°
- e) 35°

42. En un triángulo ABC, se sabe que : $m \angle A = m \angle C = 30^\circ$ y $AC = 9\sqrt{6}$ dm. Calcule la distancia del circuncentro al excentro del triángulo relativo a \overline{BC} .

- a) 9 dm
- b) 12 dm
- c) 18 dm
- d) 21 dm
- e) 27 m

43. En un triángulo acutángulo ABC por A y C se trazan perpendiculares a \overline{AC} que intersecta a la recta de Euler en M y N respectivamente. Calcule la longitud del circunradio.

Si : $AM = 2u$, $CN = 4u$ y $BH = BO$; donde "H" es el ortocentro y "O" es el circuncentro del triángulo ABC.

- a) $2u$ b) $3u$ c) $4u$
d) $5u$ e) $6u$

44. Los lados \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} de un triángulo ABC miden 7 cm; 8 cm y 10 cm respectivamente. Por el incentro, se trazan paralelas a los lados. Calcule la suma de los perímetros de 2 triángulos entre el tercero formado por dichas paralelas que tienen en común el incentro.

- a) 17 cm b) 2 cm c) $5/3$ cm
d) $17/7$ cm e) $3/2$ cm

45. En un triángulo acutángulo ABC por A y C se trazan las perpendiculares a \overline{AC} que intersecta a la recta de Euler en M y N respectivamente. Calcule BO.

Si : $AM = a$, $CN = b$ y $BH = BO$, donde : "H" es el ortocentro y "O" es el circuncentro del triángulo ABC.

- a) $\frac{a+b}{2}$ b) $\frac{a+b}{3}$ c) $\frac{a-b}{2}$
d) $a + b$ e) $2(a+b)$

46. Se tiene un triángulo ABC : $BC = 48u$ y la distancia del incentro al excentro relativo a \overline{BC} es $50u$. Calcule la $m\angle BAC$.

- a) 16° b) 32° c) 64°
d) 74° e) 106°

47. En un triángulo ABC, de excentro "E" relativo a \overline{AB} . Calcule la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos EAB y ECB.

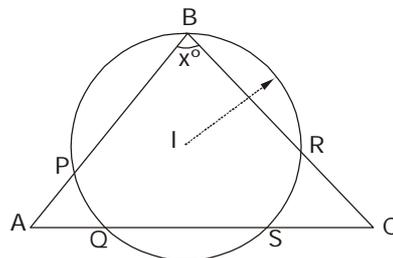
Si : $m\angle ABC = 36^\circ$.

- a) 9° b) 18° c) 27°
d) 36° e) 5°

48. En un triángulo actuángulo ABC : $m\angle A = \phi$. Calcule una de las medidas de los ángulos internos de su triángulo pedal.

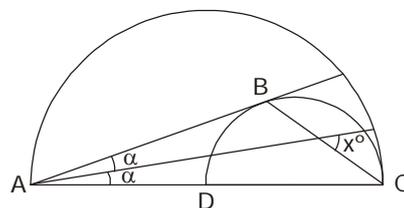
- a) $90^\circ - \phi^\circ$ b) $90^\circ - 2\phi^\circ$
c) $180^\circ - \phi^\circ$ d) $180^\circ - 2\phi^\circ$
e) $90^\circ + \frac{\phi^\circ}{2}$

49. En el gráfico, calcule x° , siendo "I" el incentro del triángulo ABC y además : $m\widehat{PQ} + m\widehat{RS} = 60^\circ$.



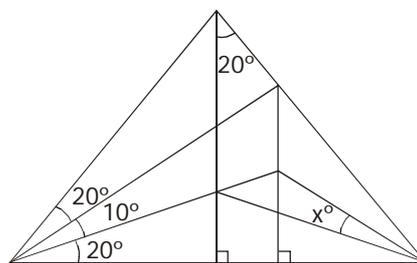
- a) 60° b) 40° c) 100°
d) 90° e) 80°

50. Del gráfico \overline{AB} es tangente, tal que : \overline{AC} y \overline{DC} son diámetros. Calcule " x° ".



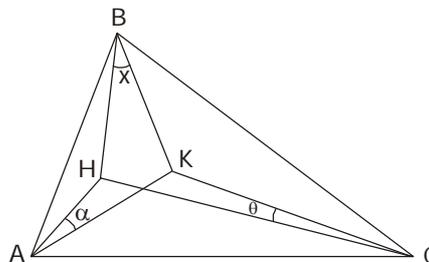
- a) 30° b) 60° c) 15°
d) 37° e) 45°

51. Del gráfico, calcule : x° .



- a) 10° b) 15° c) 20°
d) 5° e) 30°

52. Del gráfico, calcule " x° ", siendo :
H : ortocentro, K : circuncentro y
 $\alpha^\circ + \theta^\circ = 36^\circ$.



- a) 18° b) 24° c) 5°
d) 72° e) 36°

53. En un triángulo isósceles ABC :
la $m \angle ABC = 120^\circ$ y $AC = 2\sqrt{3} u$. Calcule la distancia del circuncentro al excentro relativo a \overline{BC} .

- a) 2 u b) 3 u c) $2\sqrt{2} u$
d) $3\sqrt{2} u$ e) $1,5\sqrt{2} u$

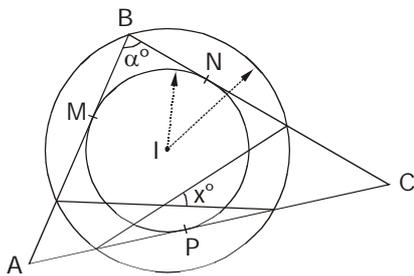
54. En un triángulo ABC, la $m \angle BAC = 24^\circ$, $m \angle BCA = 30^\circ$; se traza la ceviana \overline{BF} , tal que $AB = FC$. Calcule la $m \angle FBC$.

- a) 60° b) 75° c) 72°
d) 84° e) 96°

55. En un triángulo acutángulo ABC, el ortocentro es "H" y el circuncentro es "O". Si la distancia de "O" a \overline{AC} es 4 cm y $\overline{HO} \parallel \overline{AC}$. Calcule la longitud de la altura relativa a \overline{AC} del triángulo ABC.

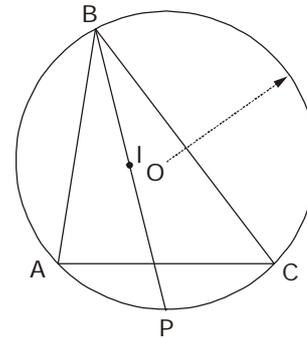
- a) 10 cm b) 8 cm c) 6 cm
d) 14 cm e) 12 cm

56. En el gráfico, calcule "x", si :
 $\alpha^\circ = 80^\circ$ y M, N y P son puntos de tangencia.



- a) 10° b) 20° c) 30°
d) 40° e) 50°

57. En el gráfico, "I" es incentro. Calcule IP, si :
 $AC = 10\sqrt{3} u$ y $m \angle ABC = 60^\circ$.



- a) 5 u b) 10 u c) 20 u
d) 15 u e) $10\sqrt{3} u$

58. Se tiene una región triangular ABC de baricentro G, con centro en A y radio \overline{AG} se traza un arco que interseca a \overline{AB} y \overline{AC} en M y N, respectivamente, de tal forma que $\overline{BN} \cap \overline{CM} = G$. Calcule BC, si el radio del arco es 4u.

- a) 8 u b) $4\sqrt{7} u$ c) $2\sqrt{7} u$
d) $6\sqrt{5} u$ e) 10 u

59. Se tiene el triángulo ABC inscrito en una circunferencia, sobre el arco BC se toma el punto P, tal que :
 $BP = 4\sqrt{2} u$.
Calcule la distancia entre los ortocentros de los triángulos ABC y APC.

- a) 2 u b) 4 u c) 6 u
d) $2\sqrt{2} u$ e) $4\sqrt{2} u$

60. Si la circunferencia inscrita del triángulo ABC es tangente a los lados BC, CA y AB en P, Q y R, respectivamente, las líneas AP, BQ, CR, son concurrente. El punto de concurrencia es llamado.

- a) Incentro. b) Ortocentro.
c) Baricentro. d) Circuncentro.
e) Punto de Geogonne.

Claves

21.	<i>c</i>
22.	<i>b</i>
23.	<i>b</i>
24.	<i>d</i>
25.	<i>c</i>
26.	<i>b</i>
27.	<i>a</i>
28.	<i>c</i>
29.	<i>a</i>
30.	<i>e</i>
31.	<i>b</i>
32.	<i>a</i>
33.	<i>d</i>
34.	<i>d</i>
35.	<i>b</i>
36.	<i>d</i>
37.	<i>a</i>
38.	<i>c</i>
39.	<i>c</i>
40.	<i>a</i>

41.	<i>c</i>
42.	<i>c</i>
43.	<i>e</i>
44.	<i>e</i>
45.	<i>d</i>
46.	<i>b</i>
47.	<i>c</i>
48.	<i>d</i>
49.	<i>e</i>
50.	<i>e</i>
51.	<i>c</i>
52.	<i>e</i>
53.	<i>c</i>
54.	<i>e</i>
55.	<i>e</i>
56.	<i>c</i>
57.	<i>b</i>
58.	<i>b</i>
59.	<i>e</i>
60.	<i>e</i>

