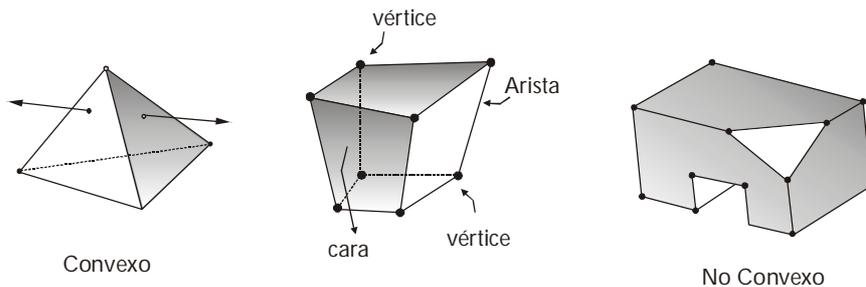


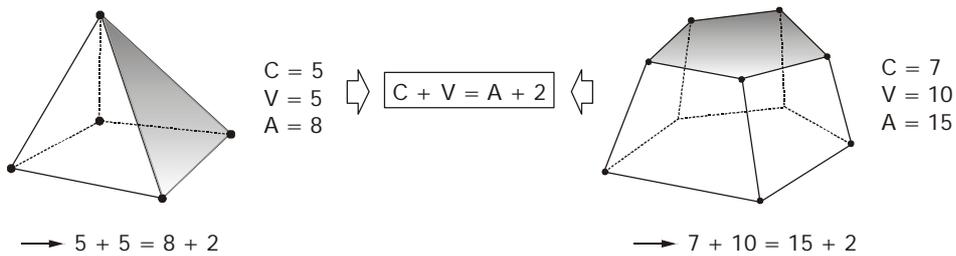
Capítulo 17

POLIEDROS POLIEDROS REGULARES

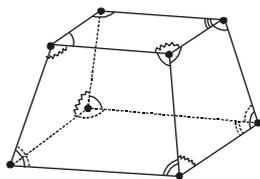
POLIEDROS



TEOREMA DE EULER



TEOREMA



S_{ic} = suma de los ángulos internos de todas las caras.

$$S_{ic} = 360^\circ (A - C) = 360^\circ (V - 2)$$

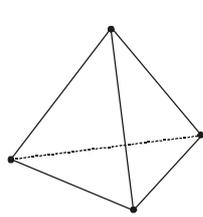
A : número de aristas
V : número de vértices
C : número de lados

* Sean : $n_1, n_2, n_3, n_4, \dots$
Los números de lados de las caras del sólido.

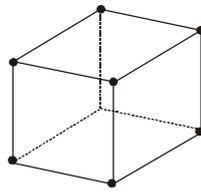
$$\nabla \text{ Aristas} = \frac{n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + \dots}{2}$$

POLIEDROS REGULARES

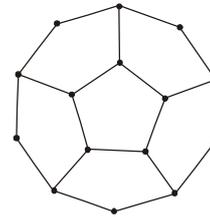
Sólo existen cinco poliedros regulares.



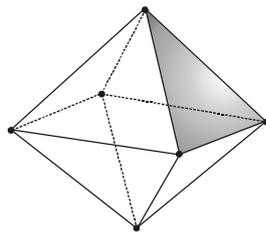
Tetraedro R.



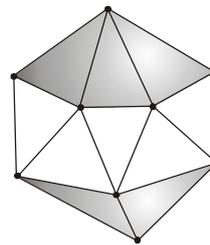
Hexaedro R.



Dodecaedro R



Octaedro R



Icosaedro R

| <i>Poliedro Regular</i> | Forma Cara | C | V | A |
|--------------------------------|---|----|----|----|
| Tetraedro |  | 4 | 4 | 6 |
| Hexaedro |  | 6 | 8 | 12 |
| Octaedro |  | 8 | 6 | 12 |
| Dodecaedro |  | 12 | 20 | 30 |
| Icosaedro |  | 20 | 12 | 30 |

Test de aprendizaje preliminar

01. En todo poliedro convexo, el número de aristas es igual a :
02. La suma de los ángulos internos de todas las caras de un poliedro convexo de "V" vértices; "C" caras y "A" aristas es igual a :
03. ¿Cuántos poliedros regulares existen?
04. En todo poliedro convexo el número de caras es igual a :
05. ¿Cuál de las siguientes expresiones es verdadera? Las caras del dodecaedro regular, son :
06. En un hexaedro regular, el ángulo que forman las diagonales de una cara es :
07. Un octaedro regular se llama así, porque tiene:
08. ¿Cuál es el área de la proyección de una cara de un tetraedro regular sobre otra cara cualquiera, si la arista del tetraedro mide $2\sqrt{3}$ m?
09. En este orden : número de caras, número de vértices, número de aristas y número de lados de cada cara, se enumeran los datos correspondientes a un tetraedro. ¿Cuál es la enumeración correcta?
10. ¿Cuál de las siguientes enumeraciones correspondientes a un hexaedro regular es la correcta? El primer número corresponde al número de caras, el segundo al número de vértices, y el tercero al número de aristas y el último, al número de lados de cada cara.

Problemas propuestos

21. ¿Cuántos poliedros cuyas caras son triángulos equiláteros existen?
- a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6
22. Si la arista de un icosaedro regular mide $\sqrt[4]{3}$ m, calcular el área de su superficie.
- a) 15 m² b) 9 c) 13
d) 6 e) $6\sqrt{3}$
23. Las aristas de un cubo miden 15 cm cada una. Si una mosca puede desplazarse sólo sobre las aristas y parte de uno de los vértices, el máximo recorrido que puede hacer para volver a su punto de partida, sin pasar dos veces por la misma arista es:
- a) 1,80 m b) 0,60 c) 0,75
d) 0,90 e) 1,20
24. Hallar el área total de un tetraedro regular, siendo la suma de las longitudes de sus aristas 36 cm.
- a) 36 cm² b) $6\sqrt{3}$ c) 24
d) $36\sqrt{3}$ e) $24\sqrt{3}$
25. Se tiene un poliedro convexo formado por 10 regiones cuadrangulares. Calcular el número de aristas de dicho poliedro.
- a) 12 b) 14 c) 16
d) 18 e) 20
26. Calcular el número de aristas de aquel poliedro, cuyo número de caras y el número de aristas están en la relación de 2 a 3. Además, la suma de las medidas de los ángulos internos de todas sus caras es igual a 3600°.
- a) 20 b) 24 c) 28
d) 30 e) 32
27. ¿Cuántas diagonales tiene aquel poliedro convexo que está limitado por 6 regiones cuadrangulares y 8 regiones triangulares.
- a) 38 b) 36 c) 34
d) 32 e) 30
28. En un tetraedro regular, si el segmento que une los puntos medios de dos aristas opuestas es \overline{MN} . El lado del tetraedro, será:
- a) $MN\sqrt{3}$ b) $MN\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $MN\sqrt{2}$
d) $MN\frac{\sqrt{3}}{2}$ e) $\frac{2}{3}MN$
29. Considerando como vértices los puntos donde se cortan las dos diagonales de cada cara de un hexaedro regular, se obtiene un octaedro, también regular. Si las aristas del hexaedro mide "a" cm, las caras del octaedro medirán :
- a) $\frac{a^2}{8}\sqrt{3}$ cm² b) $\frac{a^2}{4}$ c) $\frac{a^2}{8}$
d) $\frac{3a^2}{8}$ e) $\frac{3a^2}{4}$
30. En un cubo, las caras opuestas son \overline{ABCD} y \overline{EFGH} , siendo las aristas que las conectan \overline{AE} , \overline{BF} , \overline{CG} y \overline{DH} . El ángulo que forma \overline{BE} con \overline{AH} mide :
- a) 30° b) 45° c) 60°
d) 75° e) 90°
31. Dado el hexaedro regular $\overline{ABCD-EFGH}$ de aristas laterales \overline{AE} , \overline{BF} , \overline{CG} y \overline{DH} . Los puntos M y N son puntos medios de las aristas \overline{EH} y \overline{HG} . Hallar la medida del ángulo diedro entre el plano \overline{MNB} y el plano \overline{EFGH} .
- a) $\text{ArcTan}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ b) $\text{ArcTan}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$
c) $\text{ArcTan}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ d) $\text{ArcCos}\left(\frac{3}{\sqrt{15}}\right)$
e) $\text{ArcCos}\left(\frac{2}{\sqrt{17}}\right)$
32. En un octaedro regular, la distancia de un vértice al baricentro de la cara opuesta a dicho vértice mide L unidades(u). Calcular el área de la superficie total del octaedro.
- a) $3L^2\sqrt{3}u^2$ b) $4L^2\sqrt{3}$
c) $2L^2\sqrt{3}$ d) $\frac{4L^2\sqrt{3}}{3}$
e) $\frac{5L^2\sqrt{3}}{2}$

33. Dado un tetraedro regular de arista "a", calcular el área de la sección determinada por un plano de simetría que pasa por una de las aristas.

- a) $\frac{a^2\sqrt{2}}{2}$ b) $\frac{a^2\sqrt{2}}{3}$ c) $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$
 d) $\frac{a^2\sqrt{2}}{5}$ e) $\frac{a^2\sqrt{2}}{6}$

34. En un tetraedro OABC, se cumple que los ángulos $\text{COB} = 60^\circ$, $\text{AOB} = 45^\circ$, $\text{AOC} = 45^\circ$. Entonces, el valor del ángulo diedro correspondiente a la arista OA vale:

- a) 45° b) 60° c) 75°
 d) 90° e) 120°

35. Un poliedro que tiene 12 vértices y 21 aristas está formado por "2p" triángulos, "c" cuadriláteros y "p" pentágonos, todos convexos. Entonces, "p" y "c" son, respectivamente :

- a) 1 y 8 b) 3 y 2 c) 2 y 5
 d) 3 y 4 e) 4 y 1

36. Un paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones son a, b, c (siendo "c" la altura). Sea : $a = c = 4$ cm. Suponiendo que el área total es igual a 4 veces el área de uno de los rectángulos diagonales "verticales", entonces, dicha área total, en cm^2 , es :

- a) 76 b) 78 c) 80
 d) 82 e) 84

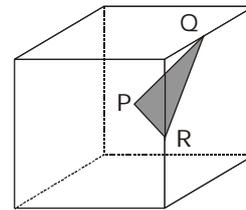
37. En un tetraedro PQRS, el ángulo diedro correspondiente a la arista PQ es recto, y los ángulos QPR y QPS miden 45° . Entonces, el ángulo RPS, mide:

- a) 30° b) 45° c) 60°
 d) 72° e) 75°

38. Se tiene un hexágono regular ABCDEF de lado "a" en un plano "P", CDL es un triángulo equilátero perpendicular a dicho plano. El área del triángulo ALF equivale al área total de un tetraedro regular de arista:

- a) $\frac{a^2\sqrt{15}}{2}$ b) $\frac{a^2\sqrt{15}}{4}$
 c) $\sqrt{\frac{a^2\sqrt{15}}{6}}$ d) $\sqrt{\frac{a^2\sqrt{5}}{12}}$
 e) $\sqrt{\frac{a^2\sqrt{15}}{12}}$

39. Se tiene un cubo de arista "a", hallar el área del triángulo PQR, si P es centro, Q y R son puntos medios.



- a) $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ b) $\frac{a^2\sqrt{3}}{8}$ c) $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$
 d) $\frac{a^2\sqrt{3}}{6}$ e) $\frac{a^2\sqrt{3}}{3}$

40. En un triedro trirectángulo O-ABC se sabe que : $\text{OA} = 1$ cm; $\text{OB} = 2$ cm y $\text{OC} = 3$ cm. Hallar la distancia de "O" a la sección plana ABC.

- a) $5/7$ b) $6/7$ c) 1
 d) $4/7$ e) $5/8$

41. Se tiene un tetraedro regular de arista "a". Hallar el volumen del tetraedro regular que se forma al unir los baricentros de las caras.

- a) $\frac{a^3\sqrt{2}}{27}$ b) $\frac{a^3\sqrt{2}}{81}$ c) $\frac{a^3\sqrt{2}}{162}$
 d) $\frac{a^3\sqrt{2}}{216}$ e) $\frac{a^3\sqrt{2}}{324}$

42. En un tetraedro ABCD, se tiene que : $\text{AC} = \text{AD}$ y $\text{BC} = \text{BD}$. Hallar la medida del ángulo que forman las aristas $\overline{\text{AB}}$ y $\overline{\text{CD}}$.

- a) 45° b) 60° c) 90°
 d) 30° e) 120°

43. Se tiene un triedro trirectángulo O-ABC, se traza $\overline{\text{OH}}$ perpendicular a la sección plana ABC. Hallar el área de la cara BOC, si las áreas de las caras ABC y BHC miden 20 y 10 cm^2 , respectivamente.

- a) $10\sqrt{2} \text{ cm}^2$ b) 5 c) $5\sqrt{2}$
 d) $15\sqrt{2}$ e) 10

44. La longitud del segmento que une los puntos medios de dos aristas opuestas de un tetraedro regular es de $\sqrt{2}$ cm. ¿Cuál es la longitud de la arista?

- a) 1 cm b) 2 c) 3
 d) $\sqrt{2}$ e) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

45. Se tiene un cubo ABCD-EFGH y un punto interior "P". Si :

$$(PA)^2 + (PC)^2 - (PB)^2 = a^2, \text{ hallar PD.}$$

- a) a b) 2a c) $\frac{a}{2}$
 d) $\frac{3a}{2}$ e) 3a

46. En el triedro isósceles :

$$O-ABC : b^\circ = c^\circ = 60^\circ, \text{ y } a^\circ = 90^\circ.$$

Sobre \overline{OA} , \overline{OB} y \overline{OC} se ubican los puntos M, N y L, respectivamente, tal que :

$$ON + OL = 8\sqrt{2} \text{ y } \angle LMN = 90^\circ. \text{ Calcular la longitud de } \overline{OM}.$$

- a) $8\sqrt{2}$ b) 8 cm c) 16 cm
 d) $4\sqrt{2}$ e) 4 cm

47. "O" es el centro de un hexaedro regular ABCD-EFGH; M y N son los puntos medios de \overline{CD} y \overline{CG} , respectivamente. Si el área de la región triangular OMN es S, calcular el área total del hexaedro regular.

- a) $8S\sqrt{3}$ b) $16S\sqrt{3}$ c) $24S\sqrt{3}$
 d) $12S\sqrt{2}$ e) $9S\sqrt{6}$

48. En el octaedro regular E-ABCD-F, M es punto medio de \overline{EC} . Calcular el ángulo formado por \overleftrightarrow{AM} y \overleftrightarrow{DF} .

- a) $\text{ArcCos} \frac{\sqrt{5}}{5}$ b) $\text{ArcCos} \frac{\sqrt{10}}{5}$
 c) $\text{ArcCos} \frac{\sqrt{5}}{10}$ d) $\text{ArcCos} \frac{\sqrt{10}}{10}$
 e) $\text{ArcCos} \frac{\sqrt{5}}{10}$

49. Dar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

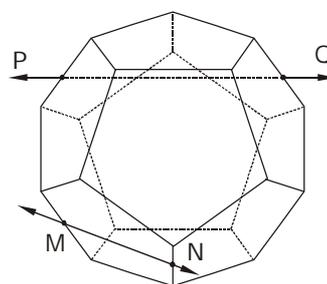
- * En los vértices de todo poliedro regular se forman ángulos diedros.
- * El icosaedro regular tiene 100 diagonales.
- * En un dodecaedro hay 20 vértices.
- * Las diagonales de un octaedro regular son perpendiculares.

- a) FVfV b) VVVV c) FFFV
 d) VFfV e) FFFF

50. Dado el cubo ABCD-EFGH de arista "a", M y N son puntos medios de \overline{AE} y \overline{CG} . Siendo "O" el centro de la cara CDHG, hallar la distancia del punto de intersección entre \overline{OF} y el plano que contiene a MBNH, a la cara EFGH.

- a) $\frac{2a}{5}$ b) $\frac{3a}{5}$ c) $\frac{a}{4}$
 d) $\frac{3a}{8}$ e) $\frac{a}{5}$

51. En el gráfico, se muestra un dodecaedro regular, siendo: P, Q, M y N puntos medios de las aristas respectivas. Calcular la medida del ángulo entre \overleftrightarrow{PQ} y \overleftrightarrow{MN} .



- a) 18° b) 36° c) 54°
 d) 72° e) 45°

52. En un tetraedro regular ABCD, M y N son puntos medios de \overline{AD} y \overline{BC} , respectivamente. Si la distancia entre \overline{MN} y \overline{AC} es $3\sqrt{2}u$, calcular el área de la superficie del poliedro conjugado del tetraedro inscrito en él.

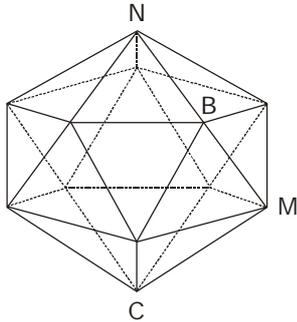
- a) $4\sqrt{3}u^2$ b) $2\sqrt{3}$ c) $16\sqrt{3}$
 d) $6\sqrt{3}$ e) $5\sqrt{3}$

53. En un octaedro regular P-ABCD-Q, M y N, son centros de las caras PCD y ABQ, respectivamente. Si la distancia entre \overleftrightarrow{DN} y \overleftrightarrow{MR} (R es punto medio de \overline{PA}) es: $(\frac{3\sqrt{22}}{11})u$.

Calcular el volumen del octaedro.

- a) $9\sqrt{2}u^3$ b) $3\sqrt{6}$
 c) $7\sqrt{19}$ d) $\sqrt{17}$
 e) $5\sqrt{6}$

54. En la figura, se muestra un icosaedro regular. Calcular la medida del ángulo entre \overleftrightarrow{MN} y \overleftrightarrow{BC} .



- a) 90° b) 60° c) 53°
 d) 72° e) 37°
55. En un octaedro regular E-ABCD-F, se traza la sección plana determinada por los puntos medios de las aristas AF y ED y por el punto B. Si la arista del octaedro es de 2 unidades, calcular la distancia de B a la recta de intersección de la sección con la cara ADF.
- a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{\frac{111}{33}}$ c) $\frac{2\sqrt{453}}{13}$
 d) $\sqrt{\frac{315}{117}}$ e) 1
56. En un tetraedro P-ABC trirectángulo en P : $PA = PB = PC = 3\sqrt{2}$. Calcular la diagonal de cubo inscrito en el tetraedro, donde uno de los ángulos sólidos del cubo es P.
- a) 3 b) $\sqrt{6}$ c) 4
 d) $2\sqrt{3}$ e) 6

57. Se tiene el hexaedro regular ABCD-EFGH, cuyas aristas mide 7 unidades. Calcular la menor distancia entre las rectas AC y MG, siendo "M" punto medio de la arista AD.

- a) $\sqrt{9}$ b) $\sqrt{3}$ c) 3
 d) $\frac{7}{3}$ e) $\sqrt{2}$

58. Calcular la medida del ángulo diedro formado por dos caras adyacentes de un tetraedro regular.

- a) $\text{ArcTan}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ b) 90°
 c) 60° d) $\text{ArcSen}\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$
 e) $\text{ArcSen}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\right)$

59. En un hexaedro ABCD-EFGH, "O" es el centro de la cara ABCD, P de \overline{AG} ; de tal manera que : $m\angle OPA = 90^\circ$ y $OF = 2\sqrt{5}$. Calcular : $(PG)^2 - (AP)^2$.

- a) 200 b) 180 c) 160
 d) 140 e) 120

60. El volumen de un octaedro regular es igual a $\sqrt{6} u^3$. Calcular la distancia del centro del octaedro a una de sus caras.

- a) $\sqrt{2}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ c) 1
 d) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ e) $\frac{\sqrt{6}}{6}$

Claves

| | |
|-----|----------|
| 21. | <i>b</i> |
| 22. | <i>a</i> |
| 23. | <i>e</i> |
| 24. | <i>d</i> |
| 25. | <i>e</i> |
| 26. | <i>d</i> |
| 27. | <i>e</i> |
| 28. | <i>c</i> |
| 29. | <i>a</i> |
| 30. | <i>c</i> |
| 31. | <i>b</i> |
| 32. | <i>c</i> |
| 33. | <i>c</i> |
| 34. | <i>d</i> |
| 35. | <i>c</i> |
| 36. | <i>c</i> |
| 37. | <i>c</i> |
| 38. | <i>e</i> |
| 39. | <i>b</i> |
| 40. | <i>b</i> |

| | |
|-----|----------|
| 41. | <i>e</i> |
| 42. | <i>c</i> |
| 43. | <i>a</i> |
| 44. | <i>b</i> |
| 45. | <i>a</i> |
| 46. | <i>d</i> |
| 47. | <i>b</i> |
| 48. | <i>e</i> |
| 49. | <i>b</i> |
| 50. | <i>a</i> |
| 51. | <i>b</i> |
| 52. | <i>c</i> |
| 53. | <i>a</i> |
| 54. | <i>b</i> |
| 55. | <i>c</i> |
| 56. | <i>b</i> |
| 57. | <i>d</i> |
| 58. | <i>d</i> |
| 59. | <i>e</i> |
| 60. | <i>d</i> |

